

Rappels : ELEMENTS D'OPTIQUE DE FOURIER, tome 1 , Yves Rabbia, Obs Côte d'Azur

notes de cours provisoires , à compléter , à corriger,...

1. Représentation du phénomène "lumière"
2. Principe de Huyghens Fresnel et application à la diffraction
3. Diffraction de Fresnel
4. Propriétés Fourierisantes des lentilles minces

1. Représentation du phénomène "lumière"

Certaines expériences invitent à donner un modèle ondulatoire (interférences, diffraction), d'autres expériences favorisent une description corpusculaire (émission et absorption de photons, effet photo-électrique).

La résolution du problème posé par la modélisation du phénomène "lumière" appartient à la mécanique quantique et nous ne nous en préoccupons pas. Autrement dit, on ne s'intéressera pas à la question : Comment passe-t-on de l'émission de photons par un ensemble d'atomes à l'existence d'une surface d'onde qui se déploie dans l'espace environnant ?

Notre modèle du phénomène "lumière" sera ici celui du champ électromagnétique oscillant, son comportement étant gouverné par les équations de Maxwell. On est amené à représenter le phénomène "lumière" par le trièdre électromagnétique (\vec{P} , \vec{E} , \vec{H}) où \vec{P} est le vecteur de Poynting décrivant la direction de propagation, \vec{E} est le champ électrique et \vec{H} le champ magnétique qui portent l'information sur la puissance transportée et sur la polarisation du rayonnement. Pour véhiculer le comportement des ondes lumineuses, il est d'usage de considérer simplement le vecteur \vec{E} .

Tout de suite une restriction du problème : **approximation scalaire**

Le champ sera pour nous un scalaire et non pas un vecteur. On ignorera donc en général, l'aspect polarisation. Cette restriction est sans conséquence dans le cas de faisceaux rencontrant des surfaces sous incidence faible, sauf peut-être dans le cas de réseaux de diffraction. Même dans ce dernier cas nous resterons dans l'approximation scalaire, sauf mention explicite.

Considérant une onde monochromatique de longueur d'onde " λ ", une représentation analytique courante pour le champ "E" au temps "t" en un point P_0 de l'espace est celle d'une sinusoïde telle que :

$$E_0(t) = A.\cos(2\pi.v.t - \phi_0)$$

où A est l'amplitude de l'oscillation, "v" est la fréquence de l'oscillation ($v = \frac{c}{\lambda}$), et " ϕ_0 " la phase à l'instant origine. On convient ici d'évaluer par $|E|^2$ la puissance transportée par l'onde.

En un point P sur l'axe de propagation et tel que $d(P_0,P) = r$, l'expression du champ sera :

$E(t) = A.\cos(2\pi.v.(t - \Delta t) - \phi_0)$ dans laquelle " Δt " représente le temps mis par la perturbation au point P_0 pour atteindre le point P. On a $\Delta t = \frac{r}{v}$ où "v" est la vitesse de propagation, qui vaut "c" dans le vide et $\frac{c}{n}$ dans un milieu d'indice optique "n". On a donc : $E(t) = A.\cos(2\pi.v.t - \phi_0 - 2\pi.\frac{n.r}{c}) = A.\cos(2\pi.v.t - \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} .n.r)$

On appelle "chemin optique" ou "trajet optique" la quantité "nr".

L'illustration de ce formalisme est donnée dans le complément sur la propagation.

Remarques :

a). Au prix de précautions mathématiques que nous laissons ici de côté, l'emploi des exponentielles complexes donne une grande souplesse de calcul (signal analytique, transformée de Hilbert). On reviendra plus tard sur les difficultés de ce choix. On préférera donc décrire l'onde par la partie réelle de :

$$E(t) = A.\exp(i.2\pi.v.t - \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda} . n.r) = A.\exp(- i. \frac{2\pi}{\lambda} . n.r).\exp(i.2\pi.v.t - \phi_0).$$

b). Le plus souvent nous n'aurons à considérer que la propagation dans un milieu d'indice $n = 1$.

c). Il est d'usage d'appeler "amplitude complexe" la quantité $A.\exp(- i. \frac{2\pi}{\lambda} . n.r)$

Elle décrit l'onde spatialement. Nous préciserons ce point plus loin.

d). Pour commodité d'écriture, nous convenons de remplacer le signe "-" par le signe "+" ce qui pour notre sujet est sans inconvénient.

e). La phase à l'origine est importante quand on s'intéresse à la cohérence de la lumière et à la modélisation du rayonnement émis, mais pour notre sujet cet aspect sera géré implicitement et nous pouvons sans inconvénient considérer qu'elle est nulle.

Compte tenu de ces remarques, on peut décrire l'onde par : $E(t) = [A.\exp(i. \frac{2\pi}{\lambda} . r)]. \exp(i.2\pi.v.t)$

f). Dans une situation physique réelle , l'énergie mesurable résulte d'une intégration temporelle (réponse du détecteur) , d'une intégration sur un intervalle spectral élémentaire (la notion d'onde monochromatique est une notion idéalisée), d'une intégration sur un élément de surface (le détecteur d'étendue réduite à un point n'existe pas) et d'une intégration sur un élément d'angle solide (isoler une direction spécifique est une notion idéalisée).

Par conséquent quand nous parlons de l'intensité $| E |^2$ nous parlons d'une énergie par unité de temps, par unité de fréquence, par unité de surface, par unité d'angle solide et une énergie W réellement collectée est décrite par :

$$W = \int_{\Delta t \Delta v S \Omega} | E |^2. dt.dv.d\sigma.d\omega$$

Cette question ne nous préoccupera que très rarement et sera étudiée dans un autre module de cours. On reconnaîtra alors dans $| E |^2$ ce qui en photométrie est appelé "intensité spécifique". Il faut cependant être alerté sur ce point.

Elle s'exprime par exemple en $W / (m^2.Hz.Stéradian)$.

D'un point de vue légèrement plus général (faisant semblant d'ignorer le formalisme donné ci-dessus), nous décrirons l'onde lumineuse par $u(x,y,z,t,\lambda)$ résultant du traitement des équations de Maxwell dans le vide (équations différentielles). On montre dans les bons bouquins qu'il résulte de ce traitement deux représentations de

la perturbation électromagnétique $u(x,y,z,t,\lambda)$ que nous appelons onde lumineuse monochromatique de longueur d'onde λ : l'onde sphérique et l'onde plane.

1. Onde sphérique

atteignant le point $P(x,y,z)$ et issue du point $P_0(x_0, y_0, z_0)$ avec $r(P_0,P)$ pour la distance de P à P_0 :

$$u(P, \lambda, t) = \frac{1}{r(P;P_0)} \cdot U(t,\lambda) \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot v \cdot t) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(P,P_0)\right)$$

2. Onde plane se propageant selon l'axe z (issue d'un point source à l'infini) atteignant le point $P(0,0,z)$:

$$u(z, \lambda, t) = U(t,\lambda) \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot v \cdot t) \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)$$

Dans le premier cas, le facteur $r(P,P_0)$ au dénominateur exprime la dilution de l'énergie initiale sur l'ensemble de la surface d'onde, qui dans le deuxième cas ne se manifeste pas (l'intensité spécifique est indépendante de la distance de la source).

La dépendance temporelle de U est nettement plus lente (typiquement 100000 fois) que celle de $\exp i2\pi vt$.

On ignorera ici cette dépendance.

Pour une longueur d'onde donnée on décrira donc les deux situations respectives par

$$u(P, t) = \frac{1}{r(P;P_0)} \cdot [U \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(P,P_0)\right)] \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot v \cdot t)$$

$$u(P, t) = [U \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right)] \cdot \exp(i \cdot 2\pi \cdot v \cdot t)$$

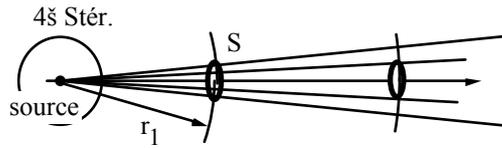
On notera $U(P)$ l'amplitude complexe (en anglais : phasor) $U \cdot \exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(P,P_0)\right)$ pour alléger l'écriture.

Surface d'onde : C'est l'ensemble des points d'égale phase.

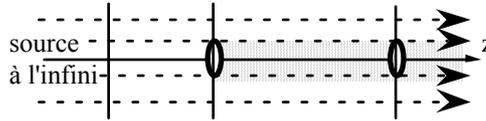
Pour une onde plane on a donc un plan comme surface d'onde ($z = \text{constante}$).

Pour une onde sphérique issue de $P_0(x_0,y_0,z_0)$ on a $r(P_0,P) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = \text{constante}$, ce qui définit une sphère centrée en P_0

Avec l'onde sphérique, la surface collectrice S reçoit le rayonnement dans l'angle solide $\omega_1 = \frac{S}{r_1^2}$ et prélève la fraction $\frac{\omega_1}{4\pi}$ de l'énergie totale émise. Si S est plus éloignée elle prélève une fraction moindre.



Avec l'onde plane, elle prélève la même fraction quel que soit l'éloignement par rapport à la source. Il n'y a pas lieu de faire intervenir de dilution de l'énergie.



2. Principe de Huyghens Fresnel et application à la diffraction

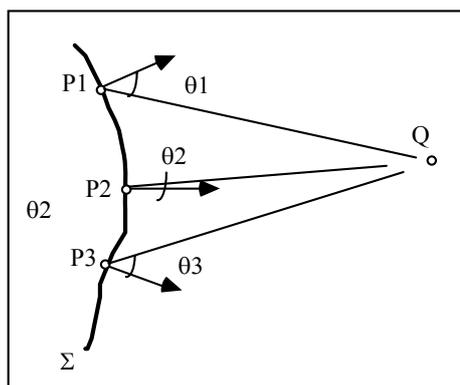
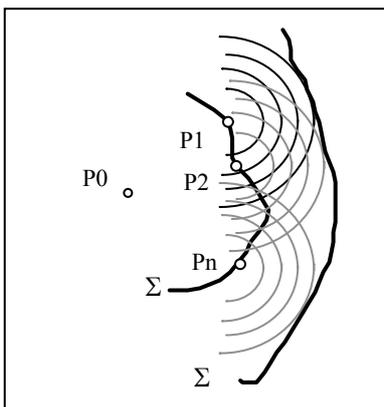
On s'est posé le problème suivant :

Connaissant la distribution d'amplitude complexe monochromatique en tout point P d'une surface d'onde Σ (surface équiphase) quelle est l'amplitude complexe en un point Q ?

Le concept de base qui va nous guider est le suivant :

Chaque point P de la surface Σ agit comme un point source émettant une onde sphérique. Ces ondes (ondulettes) sont synchrones (en phase). L'amplitude complexe au point Q est la somme des amplitudes complexes reçues en ce point et issues des différents points P.

C'est le principe de Huyghens Fresnel.



Dans le cas d'une onde rencontrant un **écran plan perpendiculaire à la direction de propagation**, et dont la transmission est zéro sauf sur une surface S appelée pupille diffractante où la transmission vaut 1, un formalisme développé par Kirchoff et Helmholtz, permet de donner une expression générale de l'amplitude en Q :

$$U(Q) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \int_S \frac{1}{r(Q; P)} \cdot U(P) \cdot K(\theta) \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(Q; P)) \cdot d\sigma$$

où $U(P)$ est l'amplitude complexe au point P (point courant sur S) et où $K(\theta)$ représente une sorte d'indicatrice d'émission, variant entre 1 et 0 quand θ croît (c'est-à-dire quand PQ s'écarte de la normale à la surface d'onde).

Pour plus de détails voir Goodman : Introduction à l'optique de Fourier.

Remarque : "S" n'est pas nécessairement une portion de surface d'onde.

Dans certaines conditions l'expression précédente se simplifie :

ce sont les **conditions de Fresnel** et les **conditions de l'optique paraxiale** :

Conditions de Fresnel : dimension typique de la pupille et distance PQ grandes devant la longueur d'onde.

Conditions paraxiales : faisceaux peu ouverts ($PQ \gg$ dimension pupille) et rayons peu inclinés sur l'axe (θ faible).

Avec ces approximations l'expression de Kirchhoff-Helmholtz va être simplifiée .

On repère par Oz la direction de propagation, les coordonnées d'un point du plan diffractant situé en $z = 0$, sont ξ et η (cela concerne les points P) et les coordonnées dans un plan parallèle situé à l'abscisse z sont x et y (cela concerne le point Q ou tout autre point de ce plan où l'on veut connaître l'amplitude complexe).

On a alors :

$$U(x,y) = \frac{1}{i\lambda} \cdot \int_S \frac{1}{r(x,y; \xi,\eta)} \cdot \Pi(\xi,\eta) \cdot K(\theta) \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(\xi,\eta; x,y)) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

où $r(x,y,\xi,\eta)$ est la distance PQ décrite par $r(x,y,\xi,\eta) = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ (voir en exos)

Les conditions précédentes permettent les approximations suivantes :

$$\text{Par exemple, on peut écrire } r(x,y,\xi,\eta) \approx \sqrt{z^2 \cdot (1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2})} \approx z$$

Le facteur $r(x,y,\xi,\eta)$ au dénominateur sort de l'intégrale et s'approxime par z . Dans l'exponentielle on garde la dépendance en x et y , mais on peut écrire :

$$r(x,y,\xi,\eta) \approx \sqrt{z^2 \cdot (1 + \frac{x^2 + y^2}{z^2})} \approx z \cdot (1 + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2 \cdot z^2})$$

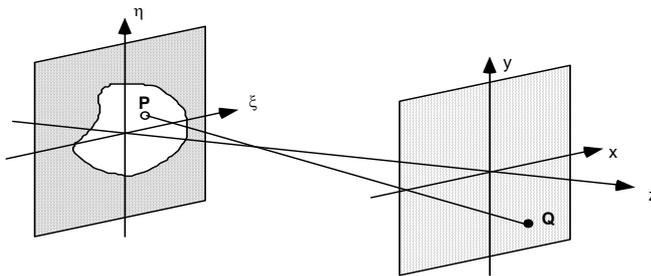
Il est nécessaire de garder cette dépendance car la variation de l'argument de l'exponentielle est gouvernée non par la différence entre r et z , laquelle évolue lentement (conditions paraxiales), mais par le rapport $\frac{r-z}{\lambda}$ qui lui; évolue très vite. D'autre part les angles θ restent faible et donc $K(\theta) \approx 1$ pour tout point P de la pupille .

En conséquence on arrive à :

$$U(x,y) = \frac{1}{i\lambda z} \cdot \int_S U(\xi,\eta) \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(\xi,\eta; x,y)) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

ou encore en introduisant $\Pi(\xi,\eta)$ pour décrire la transmission de la pupille diffractante (qui peut être une transmission complexe) et en explicitant $r(x,y,\xi,\eta)$:

$$U(x,y) = \frac{\exp(i \cdot \frac{2\pi \cdot z}{\lambda})}{i\lambda z} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\xi,\eta) \cdot U(\xi,\eta) \cdot \exp(i \cdot \pi \cdot \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{\lambda z}) \cdot d\xi \cdot d\eta$$



L'interprétation de cette expression est la suivante :

Pour construire l'amplitude en (x,y) , chaque onde issue d'un point (ξ,η) de la pupille va apporter sa contribution $U(\xi,\eta)$, mais en gardant mémoire du trajet qu'elle a parcouru de (ξ,η) à (x,y) , c'est-à-dire en tenant compte d'un supplément de phase calculé par $\phi(x,y,\xi,\eta) = [\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (\text{trajet optique})] = [\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (\text{trajet géométrique}) \cdot (\text{indice optique})]$

Ici on a décidé que l'indice optique serait 1, sauf exception mentionnée.

Si la phase en (ξ,η) est $\psi(\xi,\eta)$, l'amplitude complexe apportée en $Q(x,y)$ par $P(\xi,\eta)$ aura pour phase :

$$\Phi(x,y,\xi,\eta) = \psi(\xi,\eta) + \phi(x,y;\xi,\eta)$$

La phase ϕ comporte une partie $\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} z)$ indépendante des points (ξ,η) et (x,y) . Elle rend compte du "vieillessement" de la phase quand l'onde parcourt la distance "z" sur l'axe de propagation, entre l'écran diffractant (ξ,η) et le plan d'observation (x,y) . Ce supplément de phase est commun à tous les points de la pupille et peut donc sortir de l'intégrale. L'autre partie, dépendant du point $P(\xi,\eta)$ et du point $Q(x,y)$ va fixer les phases relatives des contributions arrivant en (x,y) . Elles joueront un rôle déterminant dans l'addition des amplitudes issues des points (ξ,η) pour former l'amplitude résultante en (x,y) . Le module au carré de cette somme donnera l'intensité au point (x,y) . En revanche la phase $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot z$ disparaîtra dans le calcul de l'intensité.

Concernant la transmission $\Pi(\xi,\eta)$, essentiellement deux cas se présentent :

1. Transmission réelle de l'ouverture (simple trou aux contours donnés, ou plusieurs trous)
2. Transmission complexe (écran formé d'un milieu transparent d'épaisseur variable, ou surface réfléchissante avec défauts de planéité). Le module de la transmission est dans tous les cas compris entre 0 et 1. (

On ignore les écrans qui pourraient provoquer une amplification). Le caractère complexe est introduit par une action de l'écran sur la phase de l'onde qui le traverse. Cette action est fondée sur le chemin optique parcouru entre l'entrée et la sortie de l'écran.

D'une manière générale, étant donnée une amplitude complexe $A \exp i\phi(\xi, \eta)$ atteignant un écran dont la transmission est $P(\xi, \eta) \cdot \exp i\psi(\xi, \eta)$, l'amplitude complexe transmise par le point (ξ, η) sera :

$$A \cdot P(\xi, \eta) \cdot \exp i(\phi(\xi, \eta) + \psi(\xi, \eta)).$$

C'est cette amplitude qui va se propager jusqu'au point (x, y) et verra augmenter sa phase de $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot r(P, Q)$.

3. Diffraction de Fresnel

Revenons à l'expression de l'amplitude complexe en (x, y)

$$U(x, y) = \frac{\exp \frac{i \cdot 2\pi \cdot z}{\lambda}}{i\lambda z} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\xi; \eta) \cdot U(\xi; \eta) \cdot \exp(i \cdot \pi \cdot \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{\lambda z}) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

On peut l'expliciter en développant l'argument de l'exponentielle dans l'intégrand :

$$U(x, y) = \frac{\exp \frac{i \cdot 2\pi \cdot z}{\lambda}}{i\lambda z} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\xi; \eta) \cdot U(\xi; \eta) \cdot \exp(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (x^2 + \xi^2 + y^2 + \eta^2 - 2x\xi - 2y\eta)) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

En posant $\frac{2\pi \cdot z}{\lambda} = \phi$, et $\Pi(\xi, \eta) \cdot U(\xi, \eta) = f(\xi; \eta)$ on obtient :

$$U(x, y) = \frac{\exp(i \cdot \phi)}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \exp(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (x^2 + y^2)) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi; \eta) \cdot \exp(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (\xi^2 + \eta^2)) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi (\frac{x}{\lambda z} \cdot \xi + \frac{y}{\lambda z} \cdot \eta)) \cdot d\xi \cdot d\eta$$

expression dans laquelle on reconnaît la **TF à deux dimensions** de la fonction

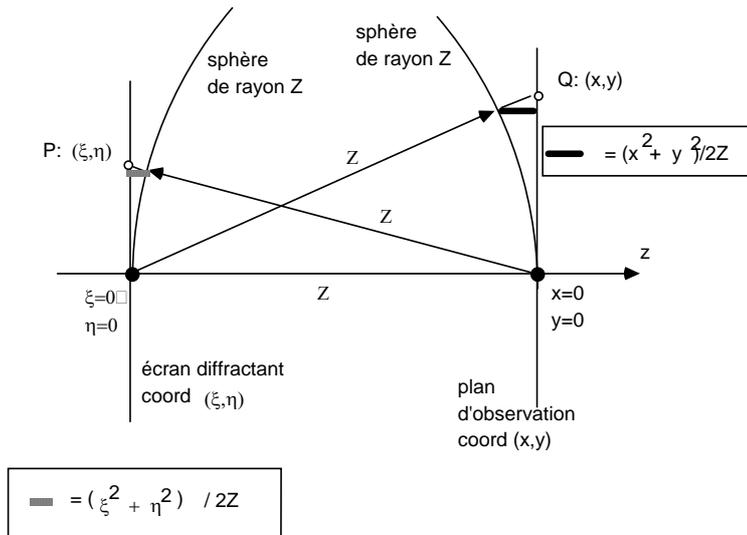
$f(\xi, \eta) \cdot \exp(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (\xi^2 + \eta^2))$, **TF calculée pour les valeurs particulières $u = \frac{x}{\lambda \cdot z}$ et $v = \frac{y}{\lambda \cdot z}$ des variables**

conjuguées

On a là un moyen puissant de calculer l'amplitude au point (x, y) .

Mais que signifient ces facteurs exponentiels complexes ? De même que $\exp i\phi$; le facteur $\exp(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (x^2 + y^2))$

disparaîtra dans le calcul de l'intensité. On peut, à titre d'exercice, réfléchir à sa signification physique au moyen de la figure suivante, qui n'appelle pas de commentaires particuliers.



Une autre exploitation de l'expression de $U(x,y)$ est de reconnaître en elle une convolution entre l'amplitude complexe $f(\xi,\eta)$ transmise au point (ξ,η) et l'exponentielle sous l'intégrant. On écrira donc :

$$U(x,y) = f(x,y) * \left[\frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z)}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \exp(i \frac{\pi}{\lambda \cdot z} (x^2 + y^2)) \right]$$

On peut interpréter cette écriture en terme d'opérateur :

on passe de l'amplitude complexe transmise par un écran dans un plan donné , à l'amplitude complexe dans un plan éloigné de "z" sur la direction de propagation, par une opération de convolution avec une fonction appropriée, qu'on pourra appeler "opérateur propagation libre dans le vide " (toujours pour une onde monochromatique).

Ainsi on a : $D(\lambda,z) = \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z)}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \exp(i \frac{\pi}{\lambda \cdot z} (x^2 + y^2))$ et $U_z(x,y) = U_0(x,y) * D(\lambda,z)$

4. Propriétés Fourierisantes des lentilles minces

On considère des lentilles minces pour pouvoir les assimiler à un écran d'épaisseur suffisamment faible et négliger la propagation au sein de l'écran, ainsi on ne tiendra compte que des trajets optiques introduits par cet écran.

Considérons d'abord une lame à face parallèle d'indice n, placée devant une pupille de transmission $\Pi(\xi,\eta)$, et une onde plane d'amplitude uniforme 1, rencontrant l'écran diffractant .

L'épaisseur de verre traversée est "e", l'épaisseur optique traversée est n.e. La variation de phase affectant l'onde à la traversée est $\Phi(\xi,\eta) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n(\xi,\eta) \cdot e(\xi,\eta)$.

Ici on suppose l'indice homogène, c'est-à-dire indépendant des coordonnées $\Phi(\xi, \eta) = \Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot n \cdot e(\xi, \eta)$

En l'absence de lame, le trajet parcouru entre l'entrée et la sortie serait simplement " $e(\xi, \eta)$ " et la variation de phase $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot e(\xi, \eta)$, en définitive l'introduction de la lame consiste à remplacer $e(\xi, \eta)$ par $n \cdot e(\xi, \eta)$ ce qui apporte un déphasage résultant $(n - 1) \cdot e(\xi, \eta)$. Ainsi on travaille avec un écran dont la transmission est donnée par le facteur

$$t_L(\xi, \eta) = \exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n - 1) \cdot e(\xi, \eta) \right]$$

On peut écrire cette transmission $\exp\left[i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot h(\xi, \eta) \right]$ en se référant à une épaisseur effective h , qui tient compte de l'indice de la lame.

Si $U(\xi, \eta)$ représente l'amplitude complexe à l'entrée de l'écran, l'amplitude complexe dans le plan d'observation à la distance Z sera

$$U(x, y) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right)}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\xi; \eta) \cdot t_L(\xi; \eta) \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (\xi^2 + \eta^2)\right) \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi}{\lambda \cdot z} (x\xi + y\eta)\right) d\xi \cdot d\eta$$

ce qui s'écrit aussi :

$$U(x, y) = \frac{\exp\left(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z\right) \exp\left(i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2)\right)}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(\xi; \eta) \cdot \exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z} + h(\xi; \eta)\right)\right) \cdot \exp\left(-\frac{i \cdot 2\pi}{\lambda \cdot z} (x\xi + y\eta)\right) d\xi \cdot d\eta$$

Si l'on sait fabriquer une lame telle que $\exp\left(i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{2z} + h(\xi; \eta)\right)\right) = 1$, on calculera $U(x, y)$ par la TF de l'amplitude $\Pi(\xi, \eta)$ à l'entrée de la lame et non plus celle de $\Pi(\xi, \eta) \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \pi}{\lambda \cdot z} (\xi^2 + \eta^2)\right)$, ce qui est infiniment plus agréable. Le problème revient donc à fabriquer une épaisseur de verre $e(\xi, \eta)$ telle que

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \left[\frac{\xi^2 + \eta^2}{2 \cdot z} + (n - 1) \cdot e(\xi, \eta) \right] = 0$$

C'est-à-dire $e(\xi, \eta) = -\frac{1}{n - 1} \cdot \frac{\xi^2 + \eta^2}{2 \cdot z}$. **Une épaisseur de verre négative !!! (???) !!!**

Où mais négative pour sa partie dépendant de (ξ, η) , en fait cela signifie qu'on doit avoir une épaisseur

$$e(\xi, \eta) = e - \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2 \cdot z \cdot (n - 1)}, \text{ où } e \text{ est l'épaisseur en } (\xi = 0, \eta = 0).$$

Le deuxième terme représente l'écart entre une sphère de rayon $R = z \cdot (n - 1)$ et le plan tangent au point $(\xi=0, \eta=0)$.

La manifestation de $\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} (n - 1) \cdot e)$ sera un facteur global de plus, sortant de l'intégrale et qui disparaîtra dans le calcul de l'intensité.

En bref, si notre lame de verre est une lentille plan convexe de rayon de courbure $z \cdot (n - 1)$, on aura dans le plan (x, y) situé à la distance z de l'écran diffractant, une amplitude complexe décrite par :

$$U_z(x, y) = \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z) \exp(i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2))}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \int \Pi(\xi, \eta) \cdot \exp(i \frac{\pi}{\lambda \cdot z} (\xi^2 + \eta^2)) \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (n - 1) \cdot \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2 \cdot R}) \cdot \exp(-\frac{i \cdot 2\pi}{\lambda \cdot z} (x\xi + y\eta)) d\xi \cdot d\eta$$

ou plus simplement (sic) :

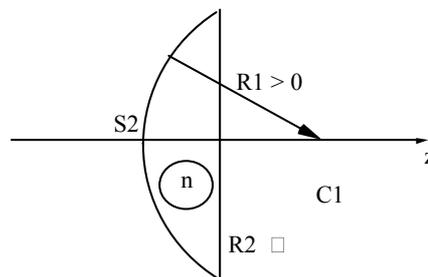
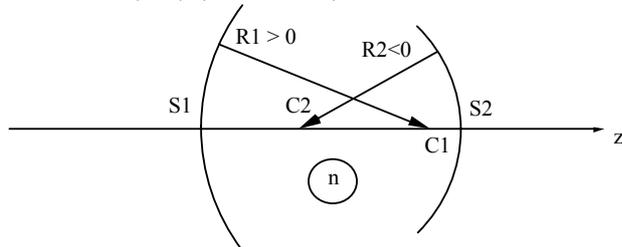
$$U_z(x, y) = \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot z) \exp(i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2))}{i \cdot \lambda \cdot z} \cdot \int \Pi(\xi, \eta) \cdot \exp(-\frac{i \cdot 2\pi}{\lambda \cdot z} (x\xi + y\eta)) d\xi \cdot d\eta$$

La distance focale d'une lentille plan convexe (rayons de courbure $R1 = R$ et $R2 = \infty$) est donnée par :

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \cdot (\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2}) = (n - 1) \cdot \frac{1}{R} \text{ formule de Gullstrand, voir ci-dessous}$$

formule de Gullstrand et conventions de signe associées

$$1/F = (n - 1) \cdot (\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2})$$



$$1/F = (n - 1) \cdot (\frac{1}{R1} - \frac{1}{R2}) \text{ avec } R1 > 0, \text{ d'où } F > 0$$

Un tel écran a une transmission

$$L'(\xi, \eta) = \exp(i (\frac{2\pi}{\lambda} \cdot [e - (n - 1) \cdot \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2R}])) = \exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot e) \cdot \exp[-i \cdot (n - 1) \cdot \frac{(\xi^2 + \eta^2)}{2R}]$$

ou encore (en oubliant le facteur de phase constante) $L(\xi,\eta) = \exp(-i \frac{\pi}{\lambda \cdot z} \cdot (\xi^2 + \eta^2))$.

On aura donc pour l'amplitude dans le plan focal :

$U_F(x,y) =$

$$\frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot F) \cdot \exp(i \frac{\pi}{\lambda F} (x^2 + y^2))}{i \cdot \lambda \cdot F} \cdot \int \Pi(\xi;\eta) \cdot [\exp(i \frac{\pi}{\lambda \cdot F} \cdot (\xi^2 + \eta^2)) \cdot L(\xi;\eta)] \cdot \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda \cdot F} (x\xi + y\eta)) \, d\xi \cdot d\eta$$

qui en définitive (le facteur entre crochets vaut maintenant 1) se réduit à :

$$U_F(x,y) = \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot F) \exp(i \frac{\pi}{\lambda F} (x^2 + y^2))}{i \cdot \lambda \cdot F} \cdot \int \Pi(\xi;\eta) \cdot \exp(-i \frac{2\pi}{\lambda \cdot F} (x\xi + y\eta)) \, d\xi \cdot d\eta$$

$$= \frac{\exp(i \frac{2\pi}{\lambda} \cdot F) \exp(i \frac{\pi}{\lambda F} (x^2 + y^2))}{i \cdot \lambda \cdot F} \cdot \left[\hat{\Pi}(u;v) \right]_{\substack{u = \frac{x}{\lambda \cdot F} \\ v = \frac{y}{\lambda \cdot F}}}$$

L'adjonction d'une lentille mince dans le plan diffractant permet donc d'obtenir dans le plan focal une distribution d'amplitude $U(x,y)$ calculable par la TF de l'amplitude complexe atteignant la lentille. Dans cette TF on affecte respectivement les valeurs $\frac{x}{\lambda F}$ et $\frac{y}{\lambda F}$ aux variables conjuguées u et v .

Alors ça, c'est vraiment super !!

Récapitulons :

Si je connais la distribution d'amplitude complexe dans un plan frontal de cote " z_1 " (c'est-à-dire perpendiculaire à la direction de propagation considérée)

Alors je sais calculer la distribution d'amplitude complexe dans un plan frontal de cote " z_2 ".

L'outil pour ce travail est la transformation de Fresnel.

Si dans le plan de cote " z_1 " je place une lentille mince convergente, de focale ($z_2 - z_1$)

Alors l'outil pour le même travail est la transformée de Fourier.

Et voilà, (presque) toute l'optique de Fourier tient là dedans. Evidement il ne faut pas oublier les conditions d'emploi de ce formalisme :

- approximation scalaire
- conditions de Fresnel
- conditions paraxiales