

Notes de cours provisoires, à corriger , à compléter

Rappels sur la Transformation de Fourier

0. Importance de la TF et situation de notre intérêt

1. Présentation intuitive et "sauvage".

2. TF à une variable

- 2.1. Définition(s) 3 lectures
- 2.2 Propriétés algébriques immédiates
linéarité / parité / complexe conjugué / hermiticité / dessins
- 2.3 Aspects pratiques du calcul des TF
analytique / numérique
- 2.4 Quelques fonctions usuelles : définition et manipulation
porte / triangle / Heaviside / signe
Dirac (définition + pptés opératoires) / peigne de Dirac
- 2.5 Convolution
définition / illustration / propriétés algébriques
élément neutre / interprétation physique / autocorrélation
- 2.6 Problèmes d'existence. Distributions.
applications triviales (?) / passage à la limite / distributions.
- 2.7 Théorèmes "outils".
translation / similitude / convolution / Parseval-Plancherel Rayleigh
autocorrélation (Wiener-Kintchine) / dérivation
- 2.8 Questions d'échantillonnage.
- 2.9 Filtrage linéaire.

3. TF à deux variables

- 3.1 Définitions
- 3.2 Théorèmes
- 3.3 Fonctions usuelles
- 3.4 Convolution et théorèmes-outils
- 3.5 Transformée de Hankel

Chap 1. Transformation de Fourier. Rappels

0 introduction : importance de la TF et situation de notre intérêt

Fourier a introduit l'idée qu'une fonction périodique peut s'exprimer comme la somme pondérée de fonctions périodiques simples (sinus et cosinus). C'est ce que l'on appelle la décomposition harmonique. Les poids respectifs associés à ces fonctions élémentaires constituent ce que l'on appelle le "spectre" de la fonction étudiée. Une illustration au quotidien en est le timbre d'un instrument qui émet une note et dont l'oreille fait quasi involontairement l'analyse, dès l'instant par exemple qu'elle sait distinguer entre une corne de brume et un clavecin. La transformation de Fourier est une généralisation de cette idée, la rendant applicable à des fonctions non-périodiques mais pas vraiment quelconques.

L'étude de la TF comporte deux types de consommation : l'une est de s'intéresser à la TF comme objet mathématique et à ses conditions d'emploi, l'autre est de s'y intéresser pour ses applications à diverses situations physiques.

C'est dans ce dernier cas que nous nous situons.

Le domaine évident d'application de cet outil d'analyse est tout ce qui concerne la recherche de périodicités plus ou moins cachées dans le comportement de tel ou tel paramètre observé (biologie, littérature, sociologie, sismologie, astronomie, statistique, ...).

Ce domaine s'élargit à la description de tout phénomène où intervient un aspect fréquentiel. Une situation très répandue est celle des systèmes linéaires. On peut voir un tel système comme une boîte qui absorbe une information (stimulus ou signal) et fournit une réponse qui résulte d'une transformation linéaire du signal absorbé. Cette modélisation de la réalité est fréquente et efficace, elle intervient dans un grand nombre d'expériences et s'inscrit dans une discipline d'importance majeure appelée traitement de l'information. La transformation de Fourier est reconnue comme fournissant un cadre formel commun à toutes ces situations dont les plus célèbres se rencontrent en électronique et en optique.

Le but de ce cours est de rappeler quelques traits saillants de cet outil universel et d'en illustrer son application à l'optique.

Pour ces rappels, la philosophie adoptée se veut proche du vécu. Ce faisant, le caractère pragmatique et opératoire aura la préséance sur les justifications mathématiques rigoureuses.

1. Une approche intuitive et "sauvage" de la définition de la TF

Le plus souvent, un cours sur la TF commence par l'énoncé de la définition, donné sous la forme d'une relation algébrique que l'on consomme plus ou moins aisément selon le degré de familiarité avec l'algèbre des intégrales fonctions d'un paramètre.

Du point de vue du Physicien, et même s'il est très à l'aise avec les manipulations algébriques, une telle approche est un peu frustrante dans la mesure où il a besoin d'appréhender de manière quasi palpable, la réalité que ce formalisme prétend décrire.

Aussi, avant d'en venir à la définition de la TF, nous allons tenter d'approcher cet objet mathématique à partir d'une notion familière, que l'on étendra de plus en plus, pour aboutir à une perception structurée de l'expression définissant la TF.

Considérons un vecteur de notre espace physique ordinaire.

On peut décrire un vecteur \vec{A} , de manière directe, comme la somme des contributions de chaque vecteur unitaire de la base (avec, bien entendu $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$) :

$$\vec{A} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + a_3 \cdot \vec{v}_3 = \sum_{k=1}^3 a_k \cdot \vec{v}_k$$

On peut le décrire aussi par la donnée de ses composantes a_k ,

$$\vec{A} : \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{cases}$$

que nous pouvons considérer comme ses caractères distinctifs par rapport à un autre vecteur du même espace. On pourrait même dire " son spectre".

Dans cet espace on a défini un produit scalaire : $\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{k=1}^3 a_k \cdot b_k = \text{un nombre !}$

A partir de la connaissance du vecteur \vec{A} et des vecteurs de la base on peut, par application du produit scalaire retrouver les composantes de \vec{A} :

$$a_k = \vec{A} \cdot \vec{v}_k = \left(\sum_{j=1}^3 a_j \cdot \vec{v}_j \right) \cdot \vec{v}_k$$

Un tel formalisme s'étend au cas d'un espace à N dimensions, pourvu que l'on dispose d'une base.

Les formules sont identiques au détail près que les sommations ne s'effectuent plus de 1 à 3 mais de 1 à N :

$$\vec{A} = a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_N \cdot \vec{v}_N = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \vec{v}_k \quad \text{et} \quad \vec{A} : \begin{cases} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_N \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{k=1}^N a_k \cdot b_k \quad \text{et} \quad a_k = \vec{A} \cdot \vec{v}_k = \left(\sum_{j=1}^N a_j \cdot \vec{v}_j \right) \cdot \vec{v}_k$$

Sous réserve de conditions d'existence à satisfaire, on peut encore étendre le formalisme au cas d'un espace à un nombre infini dénombrable de dimensions, les formules considérées deviennent par exemple :

$$\vec{A} = \dots + a_{-1} \cdot \vec{v}_{-1} + a_0 \cdot \vec{v}_0 + a_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots, \quad \vec{A} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot \vec{v}_k \quad \text{et} \quad \vec{A} : \begin{cases} \dots \\ a_{-1} \\ a_0 \\ a_1 \\ \dots \end{cases}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot b_k \quad \text{et} \quad a_k = \vec{A} \cdot \vec{v}_k = \left(\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j \cdot \vec{v}_j \right) \cdot \vec{v}_k$$

Continuons à étendre la portée du formalisme, sans entrer dans les conditions d'existence, et passons à un nombre infini non dénombrable de dimensions (pour autant que cela prenne sens) :

Ici les "vecteurs unitaires " ne sont plus repérés par un indice entier, mais par un nombre réel que l'on met à la place d'une variable et nous laissons les sommes discrètes pour passer à des intégrales :

$$\vec{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} a(u) \cdot \vec{v}(u) \cdot du$$

Cette notation est vraiment trop horrible et l' on a quand même du mal à garder la flèche au-dessus de A et de v, tant on s'est rapproché d'une description qui fait penser à des fonctions de \mathbf{R} dans \mathbf{R} . En effet la donnée du "spectre" de \vec{A} consiste à associer à chaque "u" repérant un vecteur de base, une valeur a(u).

$$\text{spectre de } \vec{A} : \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ u \mapsto a(u) \end{array} \right.$$

Il n'y a pas de scandale car certaines de ces fonctions, forment un ensemble dont la structure est celle d'un espace vectoriel (on ne se préoccupe pas pour l'instant d'explicitier les fonctions formant la base de cet espace vectoriel). Mais attention, chaque "vecteur unitaire" est un objet mathématique de même nature que le vecteur \vec{A} que l'on décrit. De ce fait si l'on parle de fonctions au lieu des vecteurs " à flèche" il faut faire apparaître cette parenté :

Ainsi, cherchant à décrire une fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ on devra considérer comme "vecteurs unitaires" de la base, des fonctions de la variable x qui seront par ailleurs munies d'un paramètre " u " pour les distinguer au sein de la base . On écrira alors :

$v(u): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui raconte une fonction à paramètre " u " et qui au nombre " x " associe le nombre $v(u,x)$

Evidement, il aurait été plus rigoureux d'écrire d'abord v_u au lieu de $v(u,x)$ pour représenter les éléments de la base, mais dans la mesure où les " u " et les " x " sont des réels, on ne tombe pas dans le non-sens en écrivant $v(u,x)$. Il importe toutefois de bien situer les rôles respectifs de u et de x .

Une fois fait ce distingo, on décrira la fonction f , par ses valeurs $f(x)$ en chaque " x " de la manière suivante :

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{avec } f(x) \text{ telle que : } f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(u) \cdot v(u;x) \cdot du$$

Chaque valeur prise par la fonction apparait donc comme la somme pondérée de fonctions $v(u,x)$. Le poids accordé à la fonction de base repérée par " u " est donné par les $a(u)$.

L'application " a " décrivant l'importance de la contribution de chaque fonction de base pour construire l'application f , joue le même rôle que la liste des composantes (a_1, a_2, \dots, a_N) employée pour décrire notre bon vieux vecteur \vec{A} dans l'espace à N dimensions. Dans le cas présent, si l'on voulait exhiber cette liste, on devrait "lister" le graphe de l'application " a ", ce qui n'est possible qu'à travers la notation :

$$a: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{u} \mapsto a(u)$$

Pendant que nous sommes en plein délire formaliste, allons jusqu'à considérer non pas seulement des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , mais bien plutôt des applications de \mathbf{R} dans \mathbf{C} (nombres complexes).

C'est-à-dire que partant d'une fonction complexe d'une variable réelle (c'est " f "), nous prétendons la décrire comme une somme pondérée de fonctions complexes (ce sont les " v ") de cette variable réelle (c'est " x ") et d'un paramètre réel (c'est " u "). La pondération est gouvernée par une fonction complexe (c'est " a ") de ce paramètre. (ouf !)

Avant de poursuivre , étendons les écritures rencontrées pour les vecteurs " à flèche" au cas des vecteurs de l'espace des " fonctions" (en supposant qu'il existe, car nous n'avons pas encore réfléchi à la validité de notre construction).

$$\text{Espace familial } \vec{A} = \sum_{k=1}^3 a_k \cdot \vec{v}_k \quad , \text{ espace vectoriel à } N \text{ dimensions (} N \text{ fini) } \vec{A} = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \vec{v}_k$$

$$\text{espace vectoriel de dimension infinie dénombrable (s'il existe) } \vec{A} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot \vec{v}_k$$

espace vectoriel de fonctions (s'il existe. Dimension infinie non dénombrable)

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(u).v(u;x). du$$

Mais est-ce que tout cela a un sens ? Est-il possible de trouver des braves fonctions qui acceptent de se voir décomposer comme une somme de fonctions de base? et quelles sont ces fonctions de base ? Et le produit scalaire ?

Justement, il se trouve que pour certaines fonctions (fonctions sommables (?)), le produit scalaire est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).g^*(x).dx \quad (* \text{ pour complexe conjugué})$$

Quant aux autres questions, donner une réponse générale est hors de notre propos (et au dessus de nos forces) mais on peut donner un exemple de fonctions pour les $v(u,x)$: il s'agit des exponentielles complexes telles que $\exp(i 2\pi u.x)$, et les fonctions qui les acceptent comme base sont les fonctions sommables (et d'autres encore).

On pourra donc décrire les fonctions f par l'expression que nous avons bâtie :

$$f: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto f(x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(u).\exp(i 2\pi u.x). du$$

Comment retrouver les "composantes" $a(u)$ permettant de construire la fonction f ?

Comme pour le cas des braves vecteurs, sur le modèle : $a_k = \vec{A} \cdot \vec{v}_k = \left(\sum_{j=1}^N a_j \cdot \vec{v}_j \right) \cdot \vec{v}_k$

$$a(u) = \langle f, v_u \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).v^*(u;x).dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x).\exp(-i.2\pi.u.x). dx$$

Et voila que (presque) sans faire exprés nous tombons sur la définition de la TF comme dans les livres !!!

Sous réserve que " f " soit une fonction "brave", définie dans \mathbf{R} et à valeurs dans \mathbf{C} , alors l'expression ci-dessous définit la fonction "a", de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , que l'on appelle la transformée de Fourier de " f "

$$a: \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ u \mapsto a(u) \end{cases} \text{ telle que } a(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \exp(-i.2\pi.u.x) \cdot dx$$

On l'appelle aussi spectre de f , ce qui ne va pas nous surprendre puisque c'est le nom que lui avons affecté (presque) au hasard, dans notre construction naïve (presque) à partir de petits vecteurs ordinaires.

De même, après notre jeu de construction, nous ne lisons plus cette définition comme une succession de signes algébriques, mais bien comme la projection d'un "vecteur " sur un des "vecteurs" de la base, dans l'espace vectoriel des fonctions "braves".

Nous venons donc de remplacer deux lignes de définition d'un cours standard sur la TF, par quatre pages d'élucubrations dépourvues de rigueur mathématique. On n'arrête pas le progrès..... de l'inflation.

2. Transformation de Fourier à une variable

2.1 Définition(s) :

Nous adopterons la définition suivante :

<p>Etant donnée une fonction $f : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$ qui remplit les "conditions appropriées" (définies plus loin) nous appellerons Transformée de Fourier de f, la fonction \hat{f} définie par</p> $\hat{f} : \begin{cases} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ u \mapsto \hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot u \cdot t) \cdot dt \end{cases}$

Convenons pour commodité d'appeler fonctions convenables ou braves ou sympas, celles dont la Transformée de Fourier (TF) existe. Nous reviendrons plus tard sur les "conditions appropriées".

D'autres définitions, qui diffèrent par le signe ou par un facteur global, sont également utilisées, mais ne changent pas fondamentalement les conditions d'emploi de cet objet.

On définit aussi la **transformation inverse ou TF⁻¹**, par la relation :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(u) \cdot \exp(+i \cdot 2\pi \cdot u \cdot t) \cdot du$$

Attention : Deux applications successives de la TF ne redonnent pas la fonction de départ. Voir exos.

En revanche, et c'est bien normal, l'application de la TF suivie de l'application de la TF⁻¹ redonne bien la fonction initiale.

Notations usuelles pour désigner la TF de f : \hat{f} , $F(f)$, $TF(f)$

Ces notations sont employées indifféremment, toutefois elles portent en elles des significations distinctes :

\hat{f} représente plutôt la fonction obtenue lorsqu'on considère l'ensemble des valeurs que prend l'intégrale, quand on y injecte des "u" différents.

$F(f)$ représente plutôt l'application d'un opérateur transformant la fonction f , il en est de même pour $TF(f)$

Plusieurs approches pour **LIRE la définition** :

Décomposition harmonique : Elle fait appel d'abord à l'intuition et fondée sur l'idée initiale de Fourier la "décomposition harmonique". Il s'agit pour cette approche d'extrapoler " à mort" notre expérience commune avec

les vecteurs (voir "présentation sauvage de la TF", dans lequel la rigueur mathématique est un peu négligée. La justification mathématique rigoureuse existe toutefois, dans une présentation plus large : celle des espaces vectoriels de fonctions.

$$\underline{\text{fonctionnelle linéaire}} : F \left| \begin{array}{l} \mathbf{E} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ (f; u) \mapsto y(u) \end{array} \right. \text{ avec } y(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot u \cdot t) \cdot dt$$

\mathbf{E} désigne un espace de fonctions "convenables", $\mathbf{E} \times \mathbf{R}$ l'ensemble des couples formés par une fonction de \mathbf{E} et un réel "u".

$$\underline{\text{transformation linéaire}} : \mathbf{F}(f) = \hat{f} .$$

Une fonction de \mathbf{E} subit une transformation. L'image de f est une fonction \hat{f} de \mathbf{E} .

$$F \left| \begin{array}{l} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E} \\ f \mapsto \hat{f} \end{array} \right. \text{ avec } \hat{f} \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ u \mapsto \hat{f}(u) \end{array} \right. \text{ et } \hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot u \cdot t) \cdot dt$$

Remarquons bien que : La détermination d'un seul point de la TF d'une fonction f , demande la connaissance de f en tous ses points.

2.2 Propriétés algébriques immédiates de l'opération "transformée de Fourier":

linéarité : Etant données des fonctions "f" et "g", satisfaisant les conditions voulues et des scalaires "λ" et "μ", on dit qu'une transformation, représentée par l'opérateur A est linéaire quand l'égalité suivante est vérifiée :

$$A(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot A(f) + \mu \cdot A(g)$$

A vérifier chez les bons auteurs : Les "conditions voulues" sont celles qui donnent à l'espace des fonctions considérées la structure d'espace vectoriel).

L'architecture de la définition de la TF (opérations linéaires) montre immédiatement que cette condition est satisfaite, dès que les TF sollicitées existent. $\mathbf{F}(\lambda \cdot f + \mu \cdot g) = \lambda \cdot \mathbf{F}(f) + \mu \cdot \mathbf{F}(g)$

parité :

rappel f paire si $f(-x) = f(x)$ pour tout x du domaine de définition.

f impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout x du domaine de définition.

On montre que toute fonction f peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire n :

Il suffit pour cela de poser $p(x) = \frac{1}{2} (f(x) + f(-x))$ et $n(x) = \frac{1}{2} (f(x) - f(-x))$. A vérifier en exos.

Dans ces conditions et compte tenu de la formule : $\exp(-i \phi) = \cos \phi - i \cdot \sin \phi$, la TF de f s'écrira :

$$\hat{f}(u) = 2 \cdot \int_0^{+\infty} p(x) \cdot \cos(2\pi \cdot u \cdot x) \cdot dx - 2 \cdot i \cdot \int_0^{+\infty} n(x) \cdot \sin(2\pi \cdot u \cdot x) \cdot dx$$

Si f est complexe (c'est-à-dire "à valeurs dans \mathbf{C} ") les choses se compliquent un peu et l'on doit considérer les parties réelles et imaginaires de p et de n , c'est-à-dire respectivement $R(p(x))$, $I(p(x))$, $R(n(x))$ et $I(n(x))$.

Alors la TF de f s'écrira :

$$\hat{f}(u) = 2 \left[\int_0^{+\infty} R(p(x)).\cos(2\pi.u.x).dx + \int_0^{+\infty} I(n(x)).\cos(2\pi.u.x).dx \right] + 2.i \left[\int_0^{+\infty} I(p(x)).\sin(2\pi.u.x).dx - \int_0^{+\infty} R(n(x)).\sin(2\pi.u.x).dx \right]$$

De la présence ou non-présence des parties paires ou non paires et des parties réelles et imaginaires dans f , on tire la parité de \hat{f} . Voir en exos : f paire donne \hat{f} paire (similaire pour impaire au lieu de paire)

ATTENTION la parité de \hat{f} concerne ce qui se passe quand on change u en $-u$. La variable x n'a rien à voir à cela. Evident ? D'accord on verra.

On rappelle au passage que f est dite hermitienne quand on a $f^*(x) = f(-x)$, où l'astérisque désigne le complexe conjugué. Ceci nous amène à l'opération de conjugaison complexe.

Complexe conjugué :

Il s'agit de répondre à la question : comment s'exprime $\hat{g}(u)$ si $g(x) = f^*(x)$?

C'est l'occasion d'un exercice de manipulation algébrique avec la définition de al TF.

La réponse est $\hat{g}(u) = [\hat{f}(-u)]^*$. Voir exos.

Illustration visuelle du formalisme. Voir dessins donnés en cours

2.3 Aspects pratiques du calcul des TF .

Il existe deux approches : approche analytique et approche numérique.

L'approche analytique consiste à déterminer l'expression de la TF en tirant profit des propriétés algébriques du calcul intégral et de la définition. Nous verrons plus loin des théorèmes, véritables outils permettant de rendre attrayant et rapide ce genre d'occupation. Leur démonstration sera l'occasion de nous exprimer sur ce terrain. Il y a toutefois des cas où cette approche est inopérante (signal réel, fonction tabulée,...) et la seconde manière s'impose.

L'approche numérique consiste à calculer l'intégrale de la définition pour l'ensemble des valeurs de "u" nécessaires, et cela à partir de l'ensemble des valeurs de $f(x)$ disponibles. Même si les $f(x)$ sont des réels, la présence du facteur complexe $\exp(-i.2\pi.ux)$ entraîne le calcul séparé de la partie réelle et de la partie imaginaire de chaque $\hat{f}(u)$. Si f est à valeurs dans \mathbf{C} , on retrouve le même genre de décomposition que celui rencontré à propos de la parité :

$$\hat{f}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} [R(f(x)).\cos(2\pi.u.x) + I(f(x)).\sin(2\pi.u.x)] .dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} [I(f(x)).\cos(2\pi.u.x) - R(f(x)).\sin(2\pi.u.x)] .dx$$

ce qui amène à calculer 4 intégrales. Evidemment certains ordinateurs se débrouillent très bien avec les complexes, mais cela n'évite pas de rentrer 4 tableaux de données.

Remarque : j'en ai un peu assez d'écrire les bornes infinies des intégrales. Désormais, elles seront implicites.

La question des tableaux de données introduit le problème de l'échantillonnage et de la transformée de Fourier discrète. Autrement dit : la connaissance de f sur un nombre fini de valeurs de x . Nous reviendrons plus tard sur cette question délicate. Auparavant nous devons continuer de remplir notre boîte à outils.

2.4 Quelques fonctions usuelles.(Notations, illustrations graphiques et manipulations)

\$ fonction porte ou PULSE rectangulaire $\Pi(x)$.

On a déjà rencontré $\Pi(x)$. Ce pulse a pour hauteur 1, pour largeur 1, il est centré en $x = 0$. On veut donner une notation à un pulse de largeur autre que 1, et centré ailleurs qu'en Zéro. Cette possibilité est directement liée à la définition de $\Pi(x)$.

$$\text{Définition : } \quad \Pi \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \\ x \mapsto \Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

Exemples : Pulse centré en $x = 5$: on notera $\Pi(x - 5)$. Exploitions la définition de $\Pi(x)$ en remplaçant x par $x - 5$

$$\Pi(x - 5) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - 5| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

$$\text{Cela se traduit par } \Pi(x - 5) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 5 - \frac{1}{2} \text{ ou } x < 5 + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a bien ainsi un pulse de largeur 1, centré en $x = 5$

Considérons maintenant la notation $\Pi(\frac{x}{10})$ et à nouveau exploitons la définition de $\Pi(x)$:

$$\Pi(\frac{x}{10}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\frac{x}{10}| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Cela se traduit par } \Pi(\frac{x}{10}) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{10}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{soit encore } \Pi(\frac{x}{10}) = \begin{cases} 1 & \text{si } -5 < x < +5 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque que la notation $\Pi(\frac{x}{A})$ indique que le support de cette fonction occupe un intervalle de longueur A .

On explicitera en exercice la notation $f(x) = 4.\Pi(\frac{x+4}{8})$.

\$ La fonction triangle ou LAMBDA : $\Lambda(x)$

$$\Lambda(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarquons que son support occupe l'intervalle $(-1, +1)$. Plus particulièrement la notation $\Lambda(\frac{x}{A})$ correspond à un support occupant une longueur $2.A$ et non pas A (comme c'est le cas pour la fonction Π).

\$ La fonction de Heaviside : $H(x)$

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{Exercice : représenter } H(a - x)$$

\$ La fonction "signe" : $\text{sgn}(x)$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \text{on remarque que } H(x) = \frac{1}{2} \cdot (\text{sgn}(x) + 1)$$

\$ Le symbole de DIRAC

Cette notion va répondre à une préoccupation courante en Physique : véhiculer dans les calculs l'idée de quantité concentrée dans un domaine infiniment petit. Il s'agit d'introduire un formalisme pour une telle idéalisation.

Notre premier contact avec les difficultés qui s'attachent à cette notion a sans doute été la rencontre du point, en géométrie, à l'école. Il n'a pas de réalité physique, mais c'est pourtant une notion bien commode.

Nous ne pouvons réaliser que des approximations du point, et la difficulté essentielle est de mettre dans un domaine restreint, une quantité suffisante d'énergie pour qu'il se manifeste. Quelle énergie ? Celle que notre oeil est capable de recevoir afin que le point soit perçu. Si le point sur la feuille ne vous dit rien, pensez aux étoiles.

Des problèmes similaires en Physique sont par exemple la réalisation du point matériel (concentration de masse) ou de la charge ponctuelle. Le problème est similaire à deux dimensions pour une répartition superficielle de charges.

Revenons à une dimension, le problème est de fabriquer quelque chose du genre "fonction" telle que par exemple:

$$f(x) = 0 \text{ partout sauf quand } x = 0$$

La deuxième contrainte est que notre fonction doit englober une énergie finie, ce qui se manifeste en Physique par l'intégrale de la fonction. Il faut donc satisfaire à une condition telle que :

$$\int f(x).dx = 1$$

Nos deux contraintes sont violemment antinomiques, mais on peut convenir de quelque chose :

Puisque le formalisme à introduire est un artifice d'écriture pour décrire une notion idéale, qui ne se rencontre pas dans les faits observables, on va convenir que le symbole $\delta(x)$ résume tout un processus de passage à la limite (ce que sont au fond les notions idéales que l'on a toujours rencontrées).

On posera que $\delta(x)$ est défini à travers la propriété $\int \delta(x).dx = 1$, comprise comme la limite de l'intégrale d'une fonction dont le support devient infiniment réduit. Aucune forme particulière n'est requise pour cette fonction, on peut tout aussi bien la construire à partir d'une Gaussienne que d'une fonction "porte" (vue en exos).

Exemple : on peut définir $\delta(x)$ par : $\delta(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\xi} \cdot \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\xi^2}\right) \right]$ ou encore $\lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\xi} \cdot \Pi\left(\frac{x}{\xi}\right) \right]$ ou par

$\delta(x) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\xi} \cdot \frac{\sin\left(\pi \frac{x}{\xi}\right)}{\pi \frac{x}{\xi}} \right]$. Par ailleurs on doit assurer $\int \delta(x).dx = 1$. La démonstration serait directe si on

avait le droit d'écrire $\int \lim(\dots).dx = \lim\left(\int (\dots).dx\right)$. Ce que les matheux interdisent.

Nous retiendrons que ce qui nous intéresse se manifeste par une intégrale et on prendra presque comme faisant partie de la définition cet échange. La justification rigoureuse existe, nous prenons ici un raccourci mnémotechnique.

Les définitions données ci dessus concernent une concentration au point $x = 0$, on peut vouloir concentrer ailleurs, en $x = a$ par exemple, dans ce cas on écrirait par exemple : $g_{\xi}(x - a) = \left[\frac{1}{\xi} \cdot \exp\left(-\pi \frac{(x - a)^2}{\xi^2}\right) \right]$

Propriétés opératoires très usuelles :

1. $\delta(a.x) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(x)$
2. $\int \delta(x).dx = 1$
3. $\int f(x). \delta(x - a).dx = f(a)$
4. $\delta(x) = \delta(-x)$ et par suite : $\delta(x - a) = \delta(-(x - a)) = \delta(a - x)$
5. $f(x). \delta(x - a) = f(a). \delta(x - a)$

La propriété 1. s'obtient en écrivant $\int \delta(ax).dx$ et en introduisant le changement de variable $y = ax$.

La valeur absolue de a , est une manière de résumer les deux cas $a > 0$ et $a < 0$ par une seule écriture.

$\int \delta(ax).dx = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int g_{\xi}(ax).dx = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int g_{\xi}(y) \cdot \frac{dy}{a}$. Si $a > 0$ on écrit $\frac{1}{a} = \frac{1}{|a|}$. Si $a < 0$, les bornes

s'intervertissent. On écrit $\frac{1}{-a} = \frac{1}{|a|}$ D'où $\int \delta(ax).dx = \frac{1}{|a|} \cdot \int \delta(y).dy$ et on en tire $\delta(a.x) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(x)$

La propriété 5. s'accepte très bien "au niveau du vécu" si l'on définit $\delta(x)$ au moyen de la fonction Π .

En effet $\int f(x).\delta(x - a).dx = \int f(x) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\xi} \cdot \Pi\left(\frac{x - a}{\xi}\right).dx$. D'après ce qu'on a vu on accepte d'écrire

$$\int f(x).\delta(x - a).dx = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int f(x) \frac{1}{\xi} \cdot \Pi\left(\frac{x - a}{\xi}\right).dx$$

Ainsi quand ξ s'approche de zéro, la quantité $f(x).\Pi\left(\frac{x - a}{\xi}\right)$ s'approche du produit de $\Pi\left(\frac{x - a}{\xi}\right)$ par la valeur de $f(x)$ au point $x = a$, de sorte que l'on peut approximer $\left[f(x) \frac{1}{\xi} \cdot \Pi\left(\frac{x - a}{\xi}\right) \right]$ par $f(a) \cdot \left[\frac{1}{\xi} \cdot \Pi\left(\frac{x - a}{\xi}\right) \right]$ ce qui conduit à $f(x).\delta(x - a) = f(a).\delta(x - a)$.

\$ Le symbole de replication ou peigne de Dirac : III (x)

On le définit par
$$\text{III} (x) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta (x - n) .$$

Avec cette écriture on trouve un DIRAC chaque fois que x prend une valeur entière. On rencontre également cette notation dans les questions d'échantillonnage où une fonction n'est connue que sur un ensemble discret de points.

Pour exprimer que l'on prélève les valeurs de la fonction en des points distants de 1 on écrit $[f(x).\text{III} (x)]$ et compte tenu de la propriété 5. du DIRAC on aura : $f(x).\text{III} (x) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} [f(n) \cdot \delta (x - n)]$.

Les points à prélever ne sont pas forcément séparés d'une unité, mais séparés de la période d'échantillonnage " p ", de valeur quelconque (mais positive, évidemment). Dans ce cas on utilise $\text{III} \left(\frac{x}{p} \right)$.

En effet on a bien
$$\text{III} \left(\frac{x}{p} \right) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{x}{p} - n \right) = \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta \left(\frac{1}{p} (x - n.p) \right) = p \cdot \sum_{n = -\infty}^{+\infty} \delta (x - n.p) .$$

Ce qui donnera bien un point prélevé chaque fois que x augmente de " p ".

Ces notations jouent un rôle intéressant dans l'emploi du produit de convolution dont nous rappelons maintenant quelques propriétés.

2.5 Convolution de deux fonctions (ou produit de convolution)

On appelle ainsi (sous réserve que son emploi ait un sens) une loi de composition sur un espace de fonctions convenables (à définir). Elle rappelle dans sa forme le produit scalaire des fonctions, rencontré plus haut, mais elle fait intervenir sous l'intégrale un paramètre. Elle associe à un couple donné de fonctions un scalaire dont la valeur dépend du paramètre. L'ensemble de ces scalaires permet de construire une fonction de ce paramètre. Pour résumer ces remarques on écrira (en notant E l'espace des fonctions "qui marchent"):

$$f * g \left| \begin{array}{l} E \times E \rightarrow \mathbf{C} \\ (f, g_x) \mapsto f(x) * g(x) = \int f(t).g(x - t).dt = \mathbf{un\ nombre\ qui\ dépend\ de\ x} \end{array} \right.$$

et ensuite, en considérant l'application qui conduit de x au résultat du produit :

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ x \mapsto h(x) = f(x) * g(x) = \int f(t).g(x - t).dt \end{array} \right.$$

Remarque : la notation $f(x) * g(x)$ très largement consacrée par l'usage doit se comprendre comme $(f * g)(x)$, c'est-à-dire l'image de x par une application où interviennent les fonctions f et g .

Les raisons qui nous amènent à nous intéresser à cette opération apparaîtront plus tard. Remarquons en attendant que l'opération de convolution par une fonction donnée " h ", est une opération linéaire, continue et invariante par translation. Cela signifie **grossièrement** que (notations vues plus haut):

1. $(\lambda.f + g) * h$ équivaut à $\lambda.(f * h) + g * h$
2. Une variation minime de f entraîne une variation minime de $f * h$.
3. Un changement d'origine pour f , résulte simplement en le même changement d'origine de $f * h$.

Attention : il ne s'agit là nullement de définitions, il s'agit d'une description approximative. Nous reviendrons plus tard là-dessus.

propriétés algébriques du produit de convolution :

commutativité : $f * g = g * f$

associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$

distributivité / addition : $(f + g) * h = f * h + g * h$

Ces propriétés se démontrent en écrivant la définition. (Voir feuille d'exos)

On montrera plus loin qu'il existe un élément neutre pour cette opération.

Autre exercice à faire : montrer que (les fonctions concernées étant dérivables et tout et tout ..)

$$\frac{\partial}{\partial x} ((f(x) * g(x))) = \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x) \right) * g(x) = f(x) * \left(\frac{\partial}{\partial x} g(x) \right).$$

On applique la dérivation sous le signe somme et c'est OK.

Element neutre du produit de convolution :

On s'intéresse au cas où le symbole de Dirac apparaît dans le produit de convolution, c'est-à-dire quand on rencontre l'écriture : $f(x) * \delta(x)$ ce qui signifie $\int f(t).\delta(x - t).dt$.

Avec ce que l'on sait de $\delta(x)$ on peut écrire aussi :

$$\int f(x).\delta(x - t).dt = f(x).\int \delta(t - x).dt = f(x).\int \delta(t).dt = f(x)$$

D'où $f(x) * \delta(x) = f(x)$. En tenant compte de la commutativité du produit de convolution, le symbole de DIRAC apparaît comme élément neutre du produit de convolution.

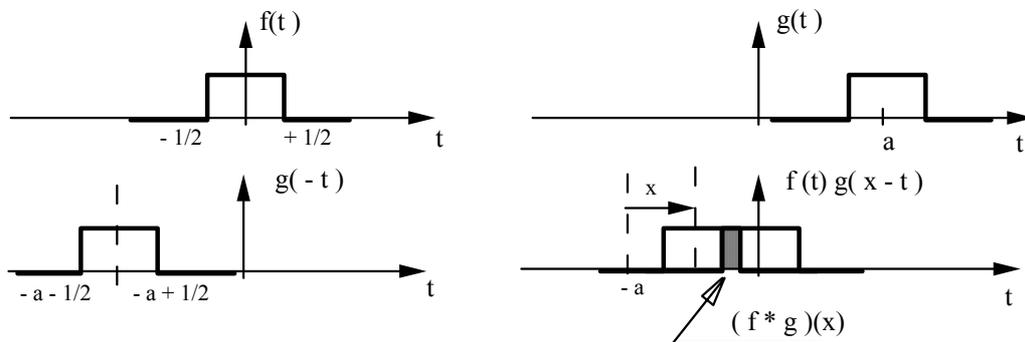
Autre propriété très utile pour exprimer une translation, mettant à profit la propriété 3.

Considérons deux fonctions f et g exprimées à partir de la fonction "porte"

$f(t) = \Pi(t)$ et $g(t) = \Pi(t - a)$. La convolution de f par g amène à considérer $g(x - t)$

$$\text{Explicitons sa définition } g(x - t) = \Pi(x - t - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x - t - a| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Ou encore } g(x - t - a) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x - a) - \frac{1}{2} < t < (x - a) + \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



C'est seulement quand les supports des fonctions f et g auront une intersection non nulle que la convolution de f par g donnera un résultat non nul. C'est - à-dire quand on aura à la fois $x - a + \frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ et $x - a - \frac{1}{2} < +\frac{1}{2}$

D'où la condition $|x - a| < 1$, qui exprime que le support de la fonction $f * g$ est centré en $x = a$, ses bornes étant

borne inf : $a - 1$, borne sup : $a + 1$.

Si l'on avait choisi $g(t) = \Pi(\frac{t-a}{\xi})$ le support de $f * g$ serait toujours centré en $x = a$, mais ses bornes seraient

borne inf : $a - \frac{1}{2} - \frac{\xi}{2}$, borne sup : $a + \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}$. En se souvenant de la définition de $\delta(x)$ au moyen d'une fonction

porte, on conçoit facilement que la convolution de f par un Dirac décalé, aura comme effet de simplement translater f. Le résultat de la convolution sera $(f * \delta_a)(x) = f(x - a)$ où δ_a signifie Dirac décalé de "a".

On a coutume d'exprimer cette propriété par la notation (horrible) $f(x) * \delta(x - a) = f(x - a)$.

Une fois que l'on est familier de ce type de notation, on se rend compte que c'est finalement très commode.

interprétation de la convolution

On a déjà vu avec la TF l'aspect multiplication et intégrale sur le résultat. Ici en plus, on applique sur l'un des facteurs un retournement (changement de signe de la variable = changement de sens de l'axe des abscisses) suivi d'une translation. C'est de ce retournement que résulte la commutativité.

Une bonne façon de ressentir l'action de cette opération est de considérer le cas discret, c'est-à-dire que les fonctions à manipuler sont données comme tableaux de nombres.

Notons au passage que c'est exactement l'approche numérique pour le calcul des convolutions. Comme pour la TF, il y a la possibilité aussi de calculs analytiques.

Une autre façon a été donnée ci-dessus par les manipulations avec la fonction "porte" décalée.

Du point de la "sensation physique" que doit provoquer en nous la convolution, retenons ceci :

Si la fonction "f" est représentée avec des "bords nets" (falaises ou discontinuités finies), la convolution de f par une fonction h (éventuellement à "bords nets" aussi) donnera une fonction représentée avec "des bords assouplis". La convolution effectue une sorte d'érosion des bords, on parle parfois de "lissage" (en anglais "smoothing"). Voir les exercices de convolutions discrètes à partir de tableaux de nombres.

On peut aussi s'amuser à calculer la convolution de la fonction $\Pi(x)$ (déjà vue en exos, et revue plus loin), avec elle-même, et le résultat encore avec $\Pi(x)$, et ainsi de suite. Eventuellement cherchez le rapport qu'il peut y avoir entre cet exercice et le théorème de la limite centrale, que vous verrez en Statistique.

Autocorrélation

Regardons la pour l'instant, comme une parente de la convolution. La différence majeure est dans le fait qu'ici on n'effectue pas de retournement d'un des facteurs. Une autre différence vient du préfixe "auto", c'est-à-dire que la même fonction intervient deux fois. L'expression à retenir est alors : $f(x) \square f(x) = \int f(t).f^*(t-x) .dt$

Deux remarques 1. $\int f(t).f^*(t-x) .dt = \int f^*(t) . f(t+x) .dt$ (à montrer en exos)

2. On peut définir une intercorrélacion , faisant intervenir f et g. (exos)

2.6 Problèmes d'existence.

Jusqu'ici on s'est intéressé à l'aspect formel de la définition, et à des propriétés algébriques. Mais on ne s'est pas intéressé à la pertinence de toute cette belle mécanique face à la réalité : est ce que tout cela a un sens ?, est ce que c'est opératoire ? On a même évacué le problème en parlant de fonctions "convenables". Il s'agit maintenant de voir comment tout cela a des chances de s'appliquer et qui sont ces fonctions aux bonnes moeurs.

Deux tentatives se présentent comme les plus simples :

La première concerne le cas où f est une constante. La deuxième s'introduit naturellement en se rappelant que l'idée sous-jacente à cette théorie est de décomposer une fonction en une somme pondérée de fonctions élémentaires, canoniques, telles que les exponentielles complexes. Ainsi on est naturellement conduit à essayer de faire fonctionner la mécanique sur une telle fonction.

MISERE !!

Dans les deux cas, attendus comme les plus triviaux, ça ne marche pas : notre définition est inopérante dès le départ, l'objet auquel elle conduit n'a pas de sens car l'intégrale n'est pas convergente pour **toute valeur** du paramètre "u" qu'elle comporte.

Exemple : pour la constante, avec $u = 0$, l'intégrale n'a pas de limite finie. Pour la sinusoïde, c'est le même problème (utiliser les formules d'Euler). Le bide intégral, c'est le cas de le dire. Des conditions de "bonnes moeurs" sont sans doute celles qui permettent à l'intégrale dans la définition, d'être convergente pour tout "u".

On peut introduire une condition suffisante:

Si la fonction à transformer est absolument sommable : $\int |f(x)| \cdot dx < +\infty$, alors la TF existe et la TF^{-1} redonne

la fonction de départ

C'est probablement très restrictif. Nous n'allons pas aller plus loin dans ce problème, à lui seul très vaste.

Nous allons toutefois essayer de nous convaincre que la définition peut être un peu violée pour nous permettre de donner une TF à ces deux fonctions, terriblement fréquentes : la constante et la sinusoïde. Ensuite, muni de l'idée que les choses peuvent s'arranger, on acceptera l'existence de TF pour d'autres fonctions a priori inconvenantes, et on se souviendra que leur expression est donnée dans les bons bouquins à la bonne page.

Avant de nous lancer dans cette histoire peut-être immorale, ne restons pas sur notre faim et regardons marcher notre définition, en choisissant soigneusement au hasard deux cas :

la gaussienne (ou presque) $f(x) = \exp(-\pi \cdot x^2)$ et la porte (ou pulse) définie par $\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Notre frustration disparaîtra après avoir fait cet exercice (voir feuille d'exos).

Retour aux problèmes existentiels.

Une chose est troublante tout de même, lorsqu'on envoie dans un analyseur de spectre une sinusoïde, on obtient bien quelque chose : un pic à la fréquence de cette sinusoïde. Le spectre d'énergie existe, cela devrait nous suffire pour conclure à l'existence de la TF de la sinusoïde. Alors quoi !?.

Remarquons que le signal absorbé par l'analyseur n'est pas une sinusoïde de durée infinie. C'est-à-dire qu'on ne cherche pas la TF de $\cos(2\pi ux)$ mais de $\Pi(\frac{x}{L}) \cdot \cos(2\pi ux)$, avec L comme durée du signal absorbé.

Ca change quand même les choses. On a déjà évité ainsi d'en vouloir aux matheux de nous priver de TF. On peut aller plus loin en introduisant deux idées :

1. En physique quand on a affaire à ces fonctions non-convenables, elles n'apparaissent pas seules mais dans un produit avec une fonction qui modère les inconvenances. Par exemple le produit par une porte provoque la restriction du support et cela permet de faire converger l'intégrale de définition. Mais cela signifie quoi ? On n'a plus affaire à la même fonction, cela ne résoud pas notre problème. Par exemple, la fonction constante et une porte très large ne sont pas décrites par la même fonction. Nous on veut la TF de la fonction et pas la TF de la fonction tronquée !!.

2. On peut aller plus loin en remarquant que si la porte limitatrice s'élargit de plus en plus, on retrouvera notre fonction de départ. On considère alors la suite g_n des TF du produit $f \cdot \Phi_n$ où f est une fonction récalcitrante et où les Φ_n sont telles que la TF existe bel et bien pour chaque "n". Ainsi $f \cdot \Phi_n$ se mettra à ressembler de plus en plus à f , au fur et à mesure que n tend vers l'infini. On décidera ensuite que si la suite g_n a une limite quand n tend vers l'infini, c'est cette limite qu'on l'adoptera comme TF de f , et cela "par définition".

Voyons cela sur un exemple avec la fonction constante comme cobaye $f(x) = 1$, pour tout x réel.

On choisit de définir la suite des ϕ_n par : $\Phi_n(x) = \exp(-\pi \frac{x^2}{n^2})$. Dans ce cas nous aurons :

$$g_n(u) = \int f(x) \cdot \Phi_n(x) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot u \cdot x) \cdot dx = \int 1 \cdot \exp(-\pi \frac{x^2}{n^2}) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot u \cdot x) \cdot dx$$

$$= \int \exp(-\pi \frac{x^2}{n^2}) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot n \cdot u \cdot \frac{x}{n}) \cdot dx = n \cdot \int \exp(-\pi \cdot y^2) \cdot \exp(-i \cdot 2\pi \cdot n \cdot u \cdot y) \cdot dy$$

$$g_n(u) = n \text{ fois la TF de } \exp(-\pi \cdot y^2) \text{ au point } (n \cdot u), \text{ c'est-à-dire } g_n(u) = n \cdot \exp(-\pi \cdot (n \cdot u)^2)$$

En posant $n = \frac{1}{\xi}$, on peut rapprocher cette écriture d'une autre déjà vue $\frac{1}{\xi} \cdot \exp(-\pi \frac{u^2}{\xi^2})$ et chercher la limite quand ξ tend vers zéro. On obtient alors $\delta(u)$ et on déclarera bravement "la TF de la constante, c'est le Dirac !". Super !

On a donc vu à partir d'un exemple, un moyen de violer un peu notre définition pour lui faire admettre l'existence de la TF. On peut objecter que ce n'est pas tout à fait la même TF que pour les fonctions convenables, ou plutôt qu'il n'y a plus unicité de la définition, ce qui est quand même gênant. D'accord.

Alors on dira que c'est une TF-au-sens-des-distributions. C'est grosso modo l'idée de base de la théorie, du moins à ce que j'en ai compris. Retenons que dans les domaines que nous allons étudier, il y a des fonctions pas convenables qui ont tout de même une TF. En particulier, on retiendra que $\int \exp(-i \cdot 2\pi \cdot u \cdot x) \cdot dx = \delta(u)$.

En exos chercher la TF de $\exp(+i \cdot 2\pi \cdot a \cdot x)$ en utilisant la Gaussienne. Réponse : $TF(\exp(+i \cdot 2\pi \cdot a \cdot x)) = \delta(u - a)$

On aura tout de suite la TF de cos et de sin par les formules de Euler $\cos \phi = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}$ et similaire.

Petit formulaire de base

fonction	transformée
$\exp(-\pi \cdot x^2)$	$\exp(-\pi \cdot u^2)$
$\Pi(x)$	$\frac{\sin(\pi \cdot u)}{\pi \cdot u}$

1	$\delta(u)$
$\exp(+i.2\pi.a.x)$	$\delta(u - a)$
$\text{III}(x)$	$\text{III}(u)$

C'est un peu pauvre, mais on peut faire pas mal de choses avec. De plus, on va voir quelques raccourcis permettant de calculer les TF sans repartir de la définition.

Notons aussi : $\exp(i\pi \frac{x^2}{a})$ qui donne $\sqrt{|a|} \cdot \exp(-i\pi a u^2)$ Ce sera très utile bientôt.

2.7 Théorèmes outils.

Ce sont des règles algébriques très efficaces pour jouer avec les TF. Les démonstrations sont à faire en exos.

On notera $\hat{f}(u)$ la TF de $f(x)$. On utilise aussi la notation $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$

théorème de translation . Si $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$ Alors $f(x - a) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u) \cdot \exp(-i.2\pi.u.a)$

clef : chgmt de variable et sortir de l'intégrale l'expon complexe .

théorème de similitude . Si $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$ Alors $f(a.x) \xleftrightarrow{\quad} \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{u}{a}\right)$

clef : chgmt de variable et jouer avec le signe des bornes d'intégration.

théorème de convolution

Si $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$ et $g(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{g}(u)$ Alors $f(x) * g(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u) \cdot \hat{g}(u)$

clef: écrire d'abord la convolution, écrire l'expression de définition de sa TF. Passer en intégrale double et intégrer à nouveau séparément dans le bon ordre avec un chgmt de variable ad hoc.

théorème de Parseval-Plancherel-Rayleigh

Si $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$ et $g(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{g}(u)$ Alors $\int f(x).g^*(x).dx = \int \hat{f}(u) \cdot [\hat{g}(u)]^* .du$

clef : utiliser le complexe conjugué de la TF et le théorème précédent appliqué à l'origine, avec la convention $f(t)*g(-t) = \int f(x).g(x-t).dx$.

théorème d'autocorrélation (ou de Wiener-Kintchine)

Si $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$ Alors $\int f^*(x).f(x+y).dx \xleftrightarrow{\quad} \left| \hat{f}(u) \right|^2$

clef : écrire la définition de l'autocorrélation . Injecter dans la définition de la TF. Faire apparaître le bon chgmt de var. Utiliser le complexe conjugué.

théorème de dérivation Si $f(x) \xleftrightarrow{\quad} \hat{f}(u)$ Alors $f'(x) \xleftrightarrow{\quad} i.2\pi.u. \hat{f}(u)$

Autrement dit : dériver dans l'espace direct revient à multiplier par $(i.2\pi.u)$ dans l'espace de Fourier

clef : écrire la définition de la TF⁻¹ de $\hat{f}(u)$ et dériver par rapport à "x" (dérivation sous le signe somme).

2.8 Questions d'échantillonnage.

On a vu plus haut qu'une approche numérique pour le calcul d'une TF est quelquefois inévitable, et nos beaux théorèmes n'y peuvent pas grand chose. Dans l'approche numérique la fonction à transformer est donnée sous la forme d'un ensemble de N valeurs de $f(x)$, correspondant à des points séparés d'une quantité appelée " intervalle d'échantillonnage".

On peut décrire notre connaissance de la fonction f par la fonction g telle que :

$g(x) = f(x) \cdot \frac{1}{p} \cdot \text{III}\left(\frac{x}{p}\right) \cdot \Pi\left(\frac{x - \frac{T}{2}}{T}\right)$ où T désigne la longueur de l'intervalle sur lequel f est enregistrée et où p est l'intervalle d'échantillonnage ou période d'échantillonnage (sampling interval). Le facteur $\frac{1}{p}$ est là à cause de la normalisation de $\text{III}\left(\frac{x}{p}\right)$. On a bien sûr (hum !) $T = N.p$

Ecrivons la définition de la TF et disons que le résultat obtenu est la fonction $\hat{g}(u)$:

$$\hat{g}(u) = \int \sum_{k=0}^{N-1} f(x) \cdot \delta(x - k.p) \exp(-i.2\pi.u.x) \cdot dx = \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \left[\int \delta(x - k.p) \exp(-i.2\pi.u.x) \cdot dx \right]$$

ce qui nous conduit à $\hat{g}(u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.k.p.u)$.

A ce stade, on a construit une fonction qui répond analytiquement à la question mais qui n'est pas d'un grand secours dans notre situation : en effet on part de N valeurs pour $f(x)$ et avec la formule exhibée, on est potentiellement en mesure de calculer $\hat{g}(u)$ pour autant de valeurs de "u" qu'on veut. Il y a quelque chose de malsain, dans la mesure où :

- 1) on risque d'inventer artificiellement de l'information.
- 2) on pressent que l'application de la TF⁻¹ avec cette même approche ne redonne pas les valeurs de départ.

Il y a problème !

Il serait plus sain puisqu'on part de N valeurs de f, que l'on arrive à un tableau de N valeurs pour la TF.

D'accord ! Ceci nous amène à dire que l'information dont on va disposer est un ensemble de N valeurs de $\hat{g}(u)$ calculée pour les valeurs u_0, u_1, \dots, u_{N-1} séparées de la même quantité Δu , qui est alors un intervalle d'échantillonnage dans l'espace de Fourier.

On aura donc à considérer seulement les valeurs $\hat{g}(0), \hat{g}(1.\Delta u), \dots, \hat{g}((N-1).\Delta u)$. Ce qui revient à dire que l'information disponible est donnée par une fonction h telle que (on rentre III pour échantillonner selon "u"):

$$h \left| \begin{array}{l} \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C} \\ u \rightarrow h(u) = \hat{g}(u) \cdot \frac{1}{\Delta u} \cdot \text{III} \left(\frac{u}{\Delta u} \right) \cdot \Pi \left(\frac{u}{N.\Delta u} \right) \end{array} \right.$$

ce qui conduit à :

$$h(u) = \Delta u \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \hat{g}(n.\Delta u) \cdot \delta(u - n.\Delta u) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.u.k.p) \cdot \delta(u - n.\Delta u)$$

En laissant agir le dirac δ , et en introduisant $p = \frac{T}{N}$ on aura :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n.k}{N} \cdot T.\Delta u) \cdot \delta(u - n.\Delta u)$$

Nous avons bien maintenant un ensemble de N valeurs pour notre TF, et l'on peut croire que tout va bien.

Pas du tout ! On a un peu progressé, mais il reste que notre séquence de valeurs n'est utile que si l'on sait dire ce que vaut Δu . Sinon on retombe sur quasiment les mêmes problèmes que précédemment : c'est très joli mais on ne peut pas l'utiliser tel que.

Que peut valoir Δu ?

Comment choisir, pour être confiant dans notre manière de gérer l'information ?

On peut expliciter la difficulté en écrivant l'expression des h(u) successifs quand on fait croître "n". Du même coup on va trouver un moyen de fixer Δu . Allons-y :

$$\begin{aligned} n=0 \quad \rightarrow \quad h(0) &= \delta(u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \\ n=1 \quad \rightarrow \quad h(1.\Delta u) &= \delta(u - 1.\Delta u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{1.k}{N} \cdot T.\Delta u) \\ \dots & \\ n=N-1 \quad \rightarrow \quad h((N-1).\Delta u) &= \delta(u - (N-1).\Delta u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{(N-1).k}{N} \cdot T.\Delta u) \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire

$$\delta(u - (N-1).\Delta u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.k.T.\Delta u) \cdot \exp(i.2\pi.\frac{k}{N}.T.\Delta u)$$

$$n = N \quad \text{-->} \quad h(N.\Delta u) = \delta(u - N.\Delta u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{N.k}{N}.T.\Delta u)$$

qu'on peut réécrire

$$\delta(u - N.\Delta u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.k.T.\Delta u)$$

$$n = N+1 \quad \text{-->} \quad h((N+1).\Delta u) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{(N+1).k}{N}.T.\Delta u) \cdot \delta(u - (N+1).\Delta u)$$

qu'on peut réécrire

$$\delta(u - (N-1).\Delta u) \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.k.T.\Delta u) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{k}{N}.T.\Delta u)$$

etc,etc,...

Sans aller plus loin on peut déjà "intuire" que les expressions qu'on obtiendrait en poursuivant la liste des "u" distants de Δu , ont une certaine ressemblance :

par exemple pour $n=0$ et $n=N$, pour $n=1$ et $n=N+1$, etc , en bref pour n et $n \bmod N$, on construit le "poids" affecté au Dirac presque de la même manière. Il y a un petit ennui qui vient de ce que pour un Δu quelconque, un facteur exponentielle complexe " $\exp(-i.2\pi.k.T.\Delta u)$ " s'introduit et empêche d'avoir une totale ressemblance.

Eureka ! Si ce facteur vaut 1, on a gagné : tout ce qu'on peut générer comme information est un ensemble de N valeurs différentes et c'est tout. Si on pousse la liste au-delà de $n = N - 1$, on ne fait qu'introduire une périodicité et on ne crée pas d'information en excès (donc suspecte). Du même coup on a une relation pour fixer Δu

$$\Delta u = \frac{1}{T} = \frac{1}{N.p}$$

Avec ce choix notre démarche est complètement cohérente, et l'on a de bonnes raisons de croire que l'on sait faire marcher de la TF discrète de manière saine et donc fiable. Fiable ? attention il faudrait être sûr de retomber sur les valeurs de départ si on fait une TF^{-1} . On regarde. Il s'agit de faire la TF^{-1} de la fonction décrite par :

$$h(u) = \sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n.k}{N}.T.\Delta u) \cdot \delta(u - n.\Delta u) \quad \text{où désormais } T.\Delta u = 1$$

c'est-à-dire qu'on doit évaluer : $\hat{h}^{-1}(x) = \int h(u) \cdot \exp(+i.2\pi.u.x) \cdot du$ et voir si le résultat conduit aux valeurs de départ : $f(0), f(p), f(2.p), \dots, f((N-1).p)$. Compte-tenu des propriétés du Dirac on arrive à :

$$\hat{h}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n.k}{N}). \exp(i.2\pi.n.\Delta u.x) \left[\int \delta(u - n.\Delta u).du \right]$$

ou encore :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n.k}{N}) \cdot \exp(i.2\pi.n.\frac{x}{N.p})$$

ou encore encore :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n}{N} \cdot (k - \frac{x}{p}))$$

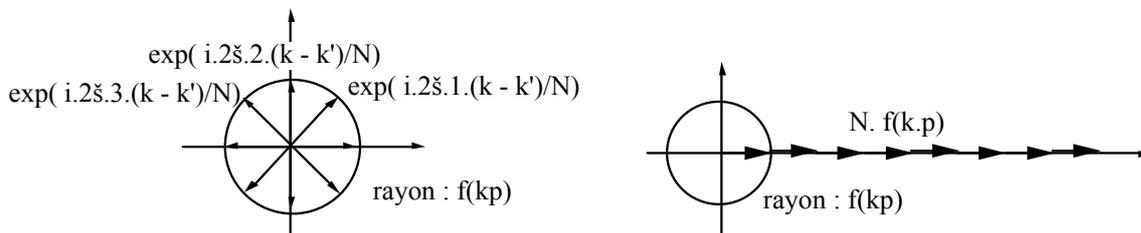
On retombe sur le même genre d'angoisse que dans le sens direct, sauf qu'ici on sait là où sont les valeurs de x à employer : les "x" sont des multiples de "p", on pose donc $x = k'.p$ et l'on a :

$$\hat{h}^{-1}(k'.p) = \sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n}{N} \cdot (k - k'))$$

ou encore

$$\hat{h}^{-1}(k'.p) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \left[\sum_{n=0}^{N-1} \exp(-i.2\pi.\frac{n}{N} \cdot (k - k')) \right]$$

La somme entre crochet est nulle sauf si $k - k' = 0$, auquel cas elle vaut N.



D'où il reste $\hat{h}^{-1}(k'.p) = N.f(k'.p)$

On retrouve donc les valeurs de départ au facteur N près . Pas de problèmes, on l'injecte dans notre processus de calcul et on définira donc la TF discrète par quelque chose d'un peu différent de la formule de départ .

En conséquence, la TF d'une fonction f échantillonnée par N valeurs avec un intervalle d'échantillonnage "p" est une fonction \hat{f} échantillonnée par N valeurs avec un intervalle d'échantillonnage Δu . Elle est définie par :

$$\hat{f}(n.\Delta u) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{k=0}^{N-1} f(k.p) \cdot \exp(-i.2\pi.\frac{n.k}{N}) \quad \text{pour la TF directe,}$$

et

$$f(k,p) = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \hat{f}(n,\Delta u) \cdot \exp(+i.2\pi \cdot \frac{n.k}{N}) \text{ pour la TF inverse}$$

cette définition n'est valide que si l'on respecte la condition : $\Delta u = \frac{1}{T} = \frac{1}{N.p}$

Remarque 1: D'autres façons d'injecter le facteur de normalisation "N" existent.

Remarque 2 : Si l'on avait pris la notation $\text{III}(\frac{x}{p})$ au lieu de $\frac{1}{p} \cdot \text{III}(\frac{x}{p})$ et de même $\text{III}(\frac{u}{\Delta u})$ au lieu de $\frac{1}{\Delta u} \cdot \text{III}(\frac{u}{\Delta u})$ on aurait eu devant notre expression finale le facteur $p.\Delta u$ c'est-à-dire $\frac{1}{N}$ qui aurait fait disparaître le facteur N en trop. Mais l'introduction de p et de Δu dans les valeurs de la fonction dont on prend la TF n'est pas plus commode que d'injecter \sqrt{N} dans la définition

Retour à la Physique :

On avait N valeurs observées. On trouve N valeurs pour représenter la TF. S'agit-il de N fréquences ?

Remarquons que les N valeurs de la TF sont complexes conjugués deux à deux (pour u_1 et u_{N-1} , pour u_2 et u_{N-2} , etc,etc...) C'est-à-dire qu'ils ont deux à deux le même module. Or c'est à ce module que se rapporte l'énergie portée par la fréquence "physique".

Il faudra donc pour rendre compte d'une fréquence physique donnée, rassembler deux valeurs de la TF qu'on a obtenue. Ainsi, au lieu de N fréquences comme on pourrait l'attendre , il n'y en aura que $\frac{N}{2}$.

Quelle est alors la fréquence maximum observable ? Elle sera le $\frac{N}{2}$ ième terme de la suite $0,\Delta u, 2.\Delta u, \dots$

Soit $f_{\max} = \frac{N}{2} \cdot \Delta u = \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{1}{2p}$. Si l'on pose $f_e = \frac{1}{p}$ = fréquence d'échantillonnage, on peut dire que

la fréquence maximale qu'on peut restituer est la moitié de la fréquence d'échantillonnage.

Prenons le problème autrement : on veut enregistrer un signal et suivre la fréquence F dans ce signal.

Quel devra être notre fréquence d'échantillonnage minimale ? Réponse 2.F

On peut voir les choses sous un angle encore différent.

Une manière d'exprimer la situation est d'écrire que $g(x)$ reproduit périodiquement le signal enregistré sur une durée T. On peut par exemple écrire : $g(x) = [f(x) \cdot \frac{1}{p} \cdot \text{III}(\frac{x}{p}) \cdot \Pi(\frac{x}{T})] * \text{III}(\frac{x}{T})$ (replication de l'information)

La TF de $g(x)$ est alors (facteurs norm ignorés ici) : $\hat{g}(u) = h(u) = [\hat{f}(u) * \text{III}(p.u) * \hat{\Pi}(T.u)] \cdot \text{III}(T.u)$

On voit que $\hat{f}(u)$ est échantillonné avec comme période $\frac{1}{T}$ qui fixe la résolution Δu dans le spectre (multiplicat par $\text{III}(T.u)$), et qu'elle a un comportement périodique, la période étant $\frac{1}{p}$ (convolution par $\text{III}(p.u)$)

De cette périodicité il résulte que si l'on veut éviter les chevauchements d'un spectre sur sa répétition, il faudra que l'intervalle occupé par le spectre soit inférieur à $\frac{1}{p}$. Or, en module, ce spectre est symétrique autour de zéro. Cela résulte de l'hermiticité ($h(u) = (h(-u))^*$) par suite, il ne pourra s'étendre que jusqu'à la moitié de la période, ce qui donne une fréquence maximale restituée : $f_{\max} = \frac{1}{2.p}$ et non pas $\frac{1}{p}$. On retrouve bien nos contraintes issues de l'algèbre.

Qu'en est-il maintenant de la finesse d'analyse du spectre ? La résolution est $\Delta u = \frac{1}{T}$. Elle sera donc d'autant meilleure que l'enregistrement est plus long.

Mais alors, on peut augmenter la résolution tant qu'on veut en augmentant artificiellement T par insertion de "zeros"? La réponse est presque oui, mais attention !

1. Augmenter T signifie consommer de la place pour mettre des zéros au lieu de mettre des valeurs de $f(x)$. Si l'on veut utiliser au mieux les "bits" dans l'ordinateur on a intérêt à limiter ce genre d'astuce. Pire que cela, ce gain en résolution ne correspond pas à un gain en information (qui est limitée par la donnée de départ). Tout ce que l'on peut obtenir par ce moyen est de rajouter des points dans le spectre, c'est une interpolation.

Remarquons d'autre part, que $T = N.p$. Ainsi pour un nombre donné N de valeurs enregistrées, il y a compétition entre la fréquence de coupure (fréquence maximale accessible : $\frac{1}{2p}$) et la résolution ($\frac{1}{T}$). Pour suivre une fréquence élevée, on privilégie le taux d'échantillonnage au détriment de la résolution dans le spectre.

Cet aspect est important quand on enregistre un signal en présence d'un bruit dont le spectre s'étend au-delà de la fréquence max du signal qu'on étudie. Si l'on ne veut pas avoir d'ennuis, c'est la fréquence max de l'ensemble signal et bruit qu'il faut pouvoir suivre. Au besoin on limite les fréquences par un filtre avant d'échantillonner le signal.

En Résumé :

Durée d'enregistrement : T **====> Résolution dans le spectre $\Delta u = \frac{1}{T}$**

Fréquence d'échantillonnage f_e **====> Fréquence maximale restituée $f_{\max} = \frac{f_e}{2}$**

Spectre d'énergie, densité spectrale

On se doute bien que la "machinerie mathématique " que nous déployons n'est qu'un moyen et non pas une fin.

Le but que nous poursuivons est d'appréhender des fonctions dans une vision différente de celle offerte par son comportement (temporel ou spatial). La vision recherchée est la description en "fréquences" (temporelles ou spatiales). En physique, ce qui nous intéresse dans cette vision est lié à la distribution d'énergie selon les fréquences ou à la distribution de puissance (énergie par unité de temps) selon les fréquences.

Pour un signal décrit par $f(x)$ la puissance moyenne qu'il contient au cours du temps T est définie par l'expression :

$$P_T = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(x)|^2 \cdot dx \quad \text{où l'intégrale représente l'énergie totale transportée pendant le temps T.}$$

Il y a deux situations à considérer :

1. le signal se déploie sur un temps fini : on peut calculer l'intégrale et on parle de signaux à "énergie finie".
2. le signal a une durée infinie, on ne peut plus calculer l'énergie totale mais on peut calculer la puissance moyenne sur un temps fini. On pousse un peu plus loin la contrainte en cherchant si la quantité :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |f(x)|^2 \cdot dx \quad \text{est définie. Si oui, alors on parle de signal à puissance moyenne finie.}$$

Pour les signaux à énergie finie, le théorème de Parseval permet d'écrire :

$$\int |f(x)|^2 \cdot dx = \int |\hat{f}(u)|^2 \cdot du \quad \text{ce qui représente l'énergie totale portée par le signal.}$$

A gauche on pourrait dire qu'on a sommé toutes les énergies présentes dans chaque tranche de temps, mais c'est une vision peu usitée. A droite on peut dire qu'on a sommé toutes les énergies présentes dans chaque tranche de fréquence. La fonction $|\hat{f}(u)|^2$ est une densité spectrale d'énergie. C'est bien en accord avec l'idée de base de la TF qui exprime les poids respectifs à assigner à des exponentielles complexes: $\hat{f}(u)$ est l'amplitude de la composante "exp (i 2π u x)". Quand cette composante est présente elle véhicule une énergie donnée par le module carré de l'amplitude, on retrouve une notion familière.

Attention, on a perdu quelque chose dans l'affaire : c'est l'information de phase portée par l'amplitude (qui peut être un nombre complexe). La connaissance de la densité spectrale d'énergie ne permet plus de reconstituer complètement le signal.

Pour les signaux de durée infinie, $\hat{f}(u)$ n'existe pas forcément mais la TF de la fonction tronquée (durée T) peut exister , notons la $\hat{f}_T(u)$. Dans ce cas $\frac{|\hat{f}_T(u)|^2}{T}$ représente une puissance par unité de fréquence, et il est naturel de définir alors une densité spectrale de puissance par passage à la limite sur T .

On dira donc : $E(u) = |\hat{f}(u)|^2$ est la densité spectrale d'énergie, pour les signaux à énergie finie
et

$$W(u) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{f}_T(u)|^2}{T} \quad \text{est la densité spectrale de puissance, pour les signaux à puissance finie.}$$

Remarque 1 : dans la suite il est probable que je n'entrerai plus dans ce distingo, et parlerai de densité spectrale tout court (sous entendu : d'énergie ou de puissance suivant le cas).

Remarque 2 : en optique on aura affaire à des signaux à énergie finie .

2.9 Filtrage linéaire.

J'appelle filtre un système physique capable d'absorber un signal (entrée, excitation, stimuli) et de fournir un signal en sortie en réponse à ce signal. Au passage du filtre le signal subit une transformation. Quand la transformation peut être décrite par un opérateur linéaire, on dit que le filtre est linéaire.

Pour cela les propriétés de linéarité et de continuité doivent être vérifiées.

Le signal peut être fonction du temps ou de variables d'espace. Quand la réponse ne dépend pas de l'origine des coordonnées on dit que le filtre est invariant par translation. Dans ce cas on peut écrire

$$s(x) \text{ ---> filtre invariant par translation ---> } r(x) \implies s(x - x_0) \text{ ---> filtre... ---> } r(x - x_0)$$

Les signaux d'entrée et de sortie ne correspondent pas forcément à des grandeurs physiques de même nature.

Si les conditions de linéarité, continuité et invariance par translation sont vérifiées alors le comportement du filtre peut être décrit par un opérateur de convolution, et l'on aura $r(x) = s(x) * h(x)$.

La fonction $h(x)$ caractérise le filtre, on l'appelle la réponse impulsionnelle. En effet si le signal d'entrée est un dirac (impulsion) , on aura $r(x) = \delta(x) * h(x) = h(x)$.

En admettant l'existence d'une réponse impulsionnelle et les trois conditions données ci-dessus, on peut non pas démontrer mais illustrer pourquoi l'opérateur de convolution décrit le système.

Si l'on envoie un signal $f(x)$ formée d'une succession d'impulsions $f(x) = \sum f(x_k) \cdot \delta(x - x_k)$ alors la réponse

sera une succession de réponses impulsionnelles pondérées par les $f(x_k)$ et toutes prenant origine sur les x_k .

Les x_k peuvent régulièrement espacés $x_k = k \cdot \Delta x$, on a alors $r(x) = \sum f(k \cdot \Delta x) \cdot h(x - k \cdot \Delta x)$

Lorsque Δx devient très petit on peut passer à une sommation continue sur une variable y qui remplace $k \cdot \Delta x$

Dans ces conditions on arrive à : $r(x) = \int f(y) \cdot h(x - y) \cdot dy = f(x) * h(x)$

La TF de $h(x)$ s'appelle la fonction de transfert en amplitude ou transmission complexe (assimilable au gain en tension des électroniciens). C'est une fonction complexe dont le module décrit l'amplification ou l'atténuation de l'amplitude du signal d'entrée et dont la phase représente le déphasage subi par le signal d'entrée.

D'après le théorème de convolution on peut écrire : $\hat{r}(u) = \hat{s}(u) \cdot \hat{h}(u)$

Concernant les densités spectrales (notées ϕ) on aura $\phi_r(u) = \phi_s(u) \cdot |\hat{h}(u)|^2$.

Le module carré de $\hat{h}(u)$ est parfois appelé fonction de transfert aussi, ou fonction de transfert de modulation ou fonction d'appareil (gain énergétique ou gain en puissance).

En revenant à l'espace direct par TF inverse on constate que l'information n'est plus disponible sur les signaux mais sur leur autocorrélation (th de Wiener Kintchine). On constate encore que la perte d'information sur la phase interdit de retrouver l'information complète sur les signaux.

La détermination expérimentale de la réponse impulsionnelle se fait par l'envoi de signaux dont le support est de plus en plus étroit. En dessous d'une certaine étendue du support on constate que la réponse n'évolue plus, on l'adopte alors comme réponse impulsionnelle.

Une autre façon est d'envoyer des signaux en forme d'escalier (Heaviside). La dérivée de la réponse donne alors la réponse impulsionnelle (théorème de dérivation des convolutions). En effet on a dans ce cas

$$r(x) = H(x) * h(x), \text{ puis } \frac{\partial r(x)}{\partial x} = \frac{\partial H(x)}{\partial x} * h(x) = \delta(x) * h(x) = h(x)$$

Enfin on peut étudier la réponse dans l'espace des fréquences par analyse harmonique, en envoyant des signaux sinusoidaux de fréquences croissantes et en relevant amplitude et phase des réponses obtenues. En fait , pour les signaux temporels on a plutôt recours à la transformée de Laplace.

3. TF à 2 dimensions à suivre..... (autre polycop : TF tome 2)

Rappels d'optique "classique"

euh à faire .