

# The Solar Core Rotation: Let's Look back to the Forward Problem !

**Thierry Corbard**  
**Observatoire de la Côte d'Azur**

- **Expected splittings:** -  $m$  dependance  
- Frequency dependance
- **Relation with a-coefficients**
- **Relation between full disk observations and splittings and a-coefficients**
- **Sectoral splittings and the equator**
- **2D versus 1D inversion**

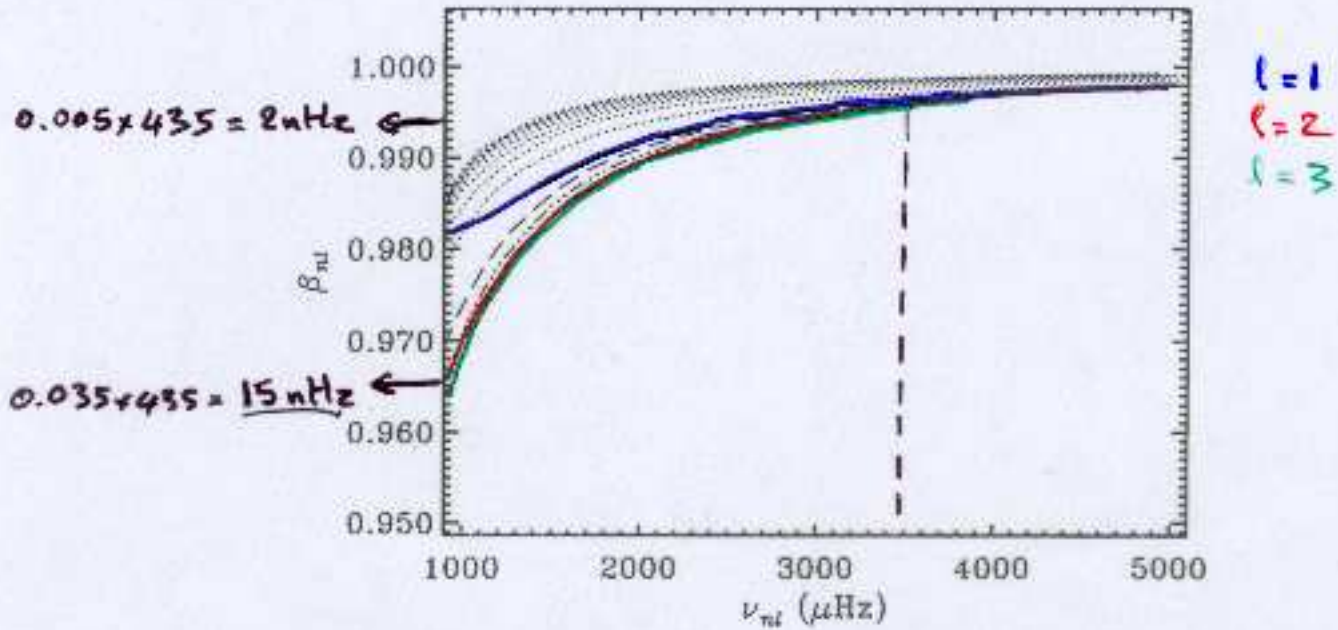


FIG. 5 – Coefficients  $\beta_{nl} = 1 - C_{nl}$  obtenus pour des modes acoustiques dans un modèle solaire standard. Les coefficients correspondants à un même degré  $l$  sont reliés par une ligne.  $l = 1$  : — ;  $l = 2$  : — ;  $l = 3$  : - - - - ;  $l = 4$  : - · - · - ;  $l = 5$  : - - - - - ;  $l = 10, 15, \dots, 50$  : ······ ( $\beta_{nl}$  augmente avec  $l$ ). D'après Christensen-Dalsgaard (1997).

$$K_{nlm}(r, \mu) = \frac{\rho_0(r)r^2}{I_{nl}} \left\{ \left( \zeta_{nl}^{(o)'}(r) - 2\zeta_{nl}^{(o)}(r)\eta_{nl}^{(o)}(r) \right) \tilde{P}_l^m(\mu)^2 + \eta_{nl}^{(o)'}(r) \left[ \left( \frac{d\tilde{P}_l^m(\mu)}{d\theta} \right)^2 + \frac{m^2}{\sin^2\theta} \tilde{P}_l^m(\mu)^2 - 2\frac{\mu\tilde{P}_l^m(\mu)}{\sin\theta} \frac{d\tilde{P}_l^m(\mu)}{d\theta} \right] \right\} \quad (29)$$

On note que le splitting dépend de l'ordre azimutal  $m$ : la dégénérescence en  $m$  du spectre des oscillations est levée par la rotation. Cette expression relie les splittings synodiques (mesurés depuis la terre) à la rotation solaire synodique.

$$\left( \frac{\delta\omega_{nlm}}{m} \right)_{syn} = \int_0^{R_\odot} \int_{-1}^1 K_{nlm}(r, \mu) \Omega_{syn}(r, \mu) dr d\mu - C_{nl} \Omega_T \quad (30)$$

Il est intéressant d'en déduire deux relations mettant en jeu les quantités sidérales.

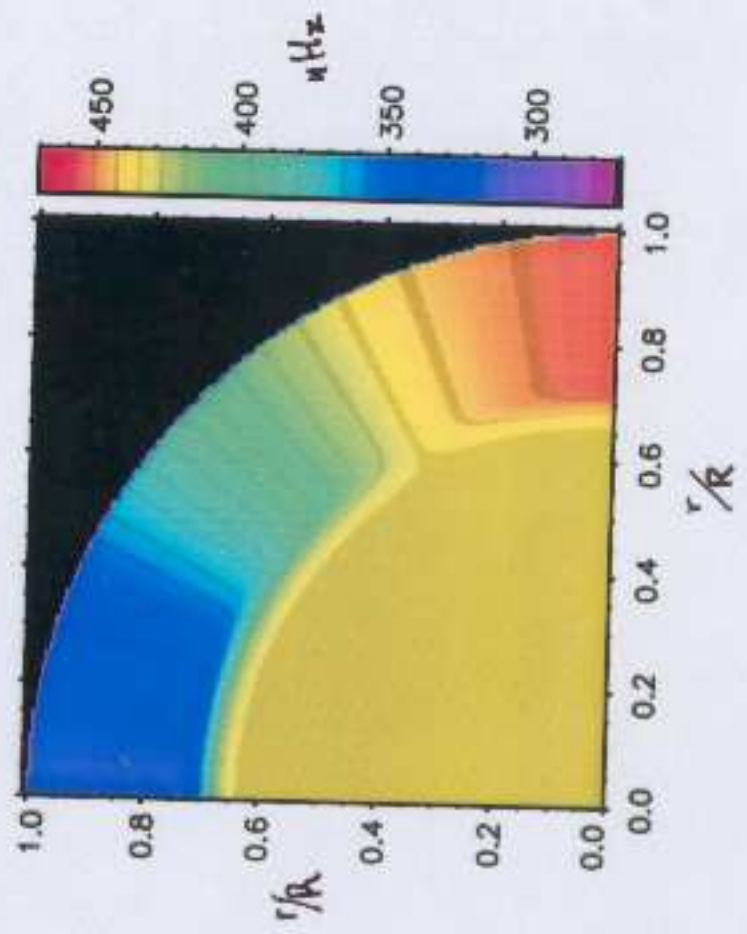
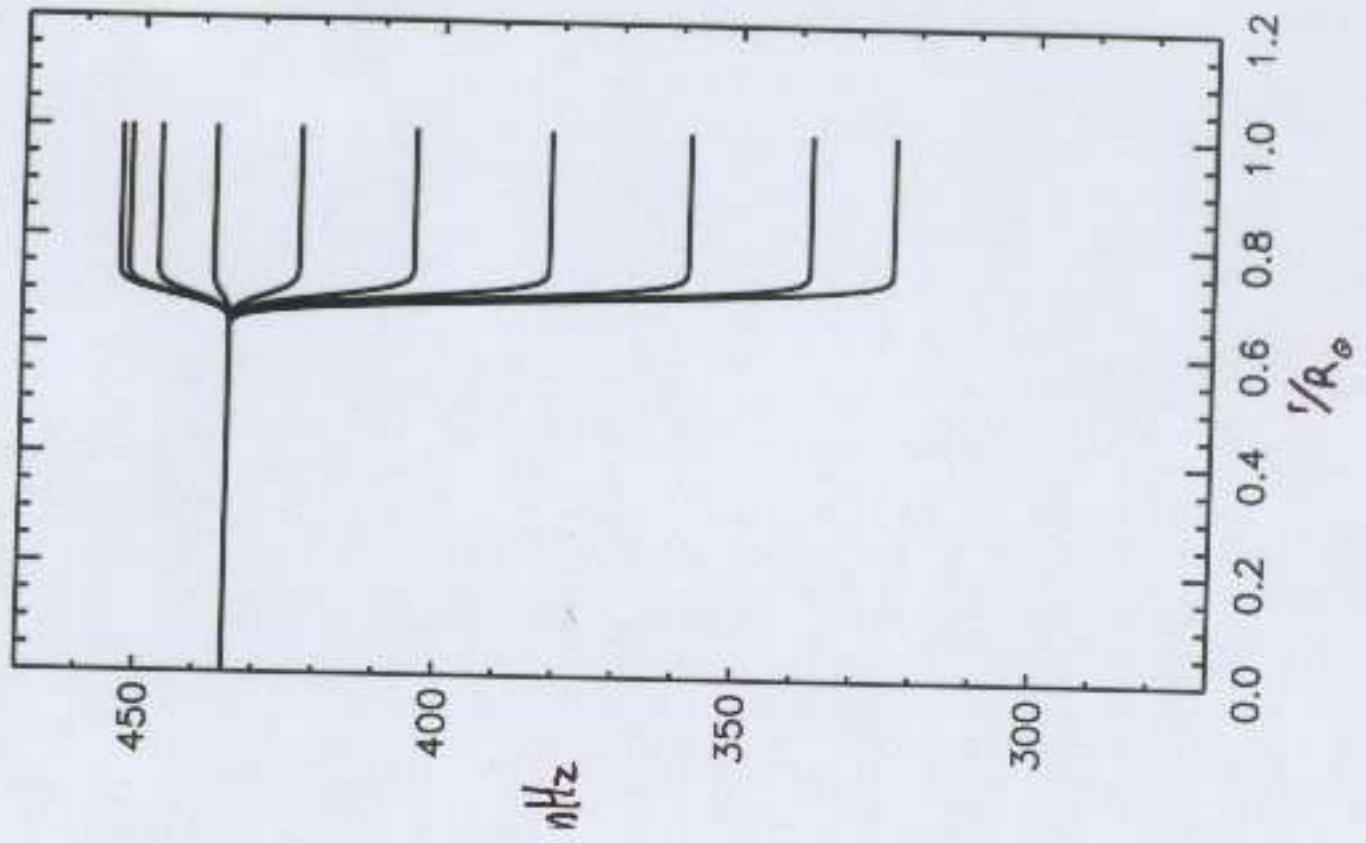
1. La relation entre splittings sidéraux et la rotation sidérale s'obtient en posant  $\Omega_T = 0$  (on se place dans un repère d'inertie):

$$\left( \frac{\delta\omega_{nlm}}{m} \right)_{sid} = \int_0^{R_\odot} \int_{-1}^1 K_{nlm}(r, \mu) \Omega_{sid}(r, \mu) dr d\mu \quad (31)$$

Cette expression correspond au résultat obtenu par Hansen et al. (1977) et Gough (1981) mentionné dans l'introduction (§1.1.2). Le résultat obtenu par Ledoux (1951) pour une étoile en rotation rigide  $\Omega_{sid} = \Omega_\odot$  (c.à.d.  $(\delta\omega_{nlm}/m)_{sid} = (1 - C_{nl})\Omega_\odot$ , cf. Eq. (5)) se retrouve aisément à partir des équations (21), (22) et (23) en utilisant les propriétés (A5)

Model A:  
 $\Omega_0 = 435 \text{ nHz}$  Core  
 $\Omega_1 = 453.5 \text{ nHz}$  equator  
 $\Omega_{cz} = \Omega_1 r a_2 \cos^2 \theta + a_4 \omega^2 \theta$   
 $\left\{ \begin{array}{l} a_2 = -61 \text{ nHz} \\ a_4 = -73.5 \text{ nHz} \end{array} \right.$  CZ

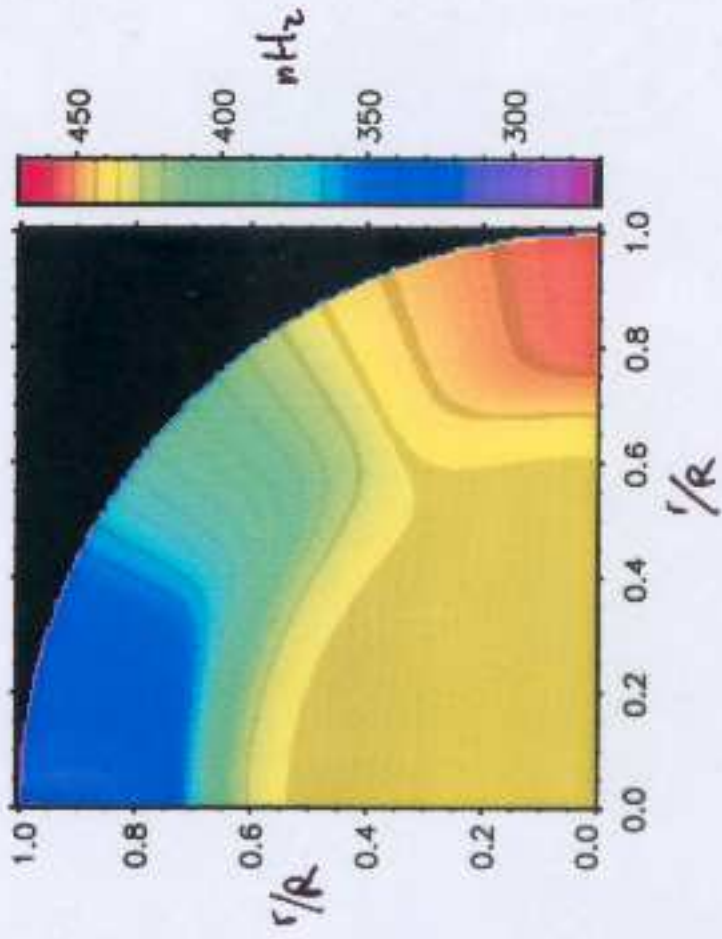
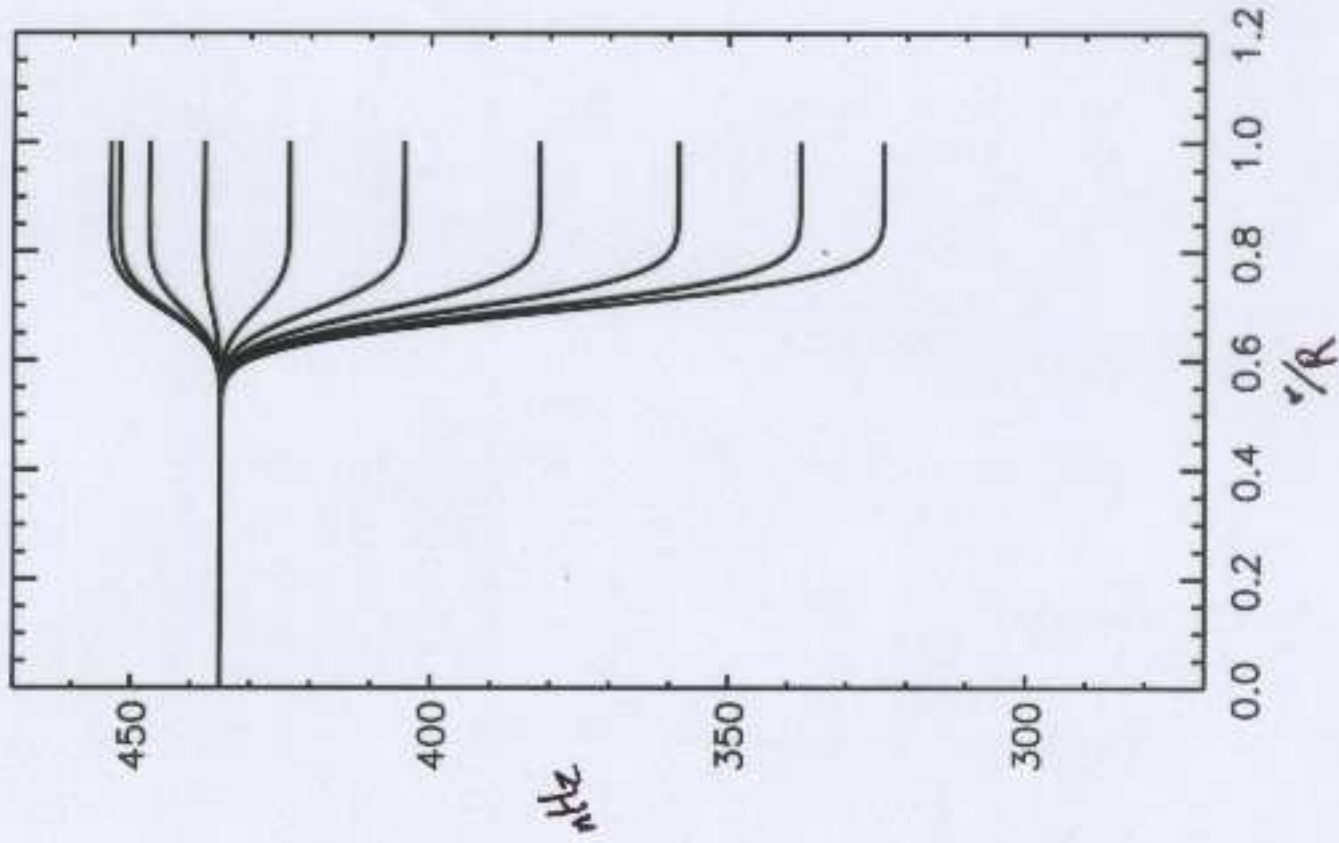
Tachocline  
 $\left\{ \begin{array}{l} \omega_c = 0.05 R_0 \\ r_c = 0.69 R_0 \end{array} \right.$





Model B: larger tachocline

$$\omega_c = 0.15 R_0$$



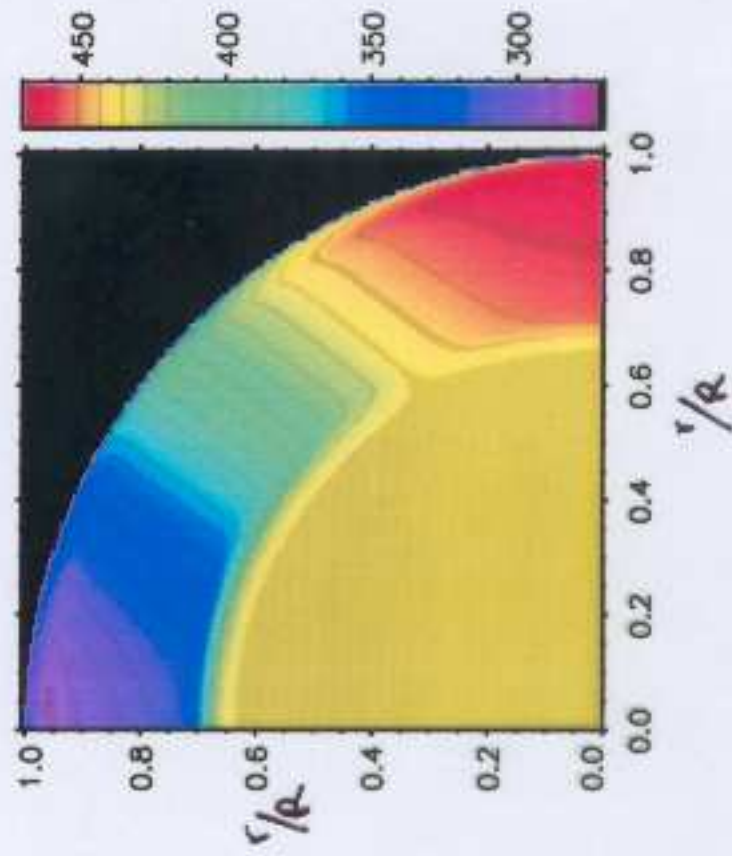
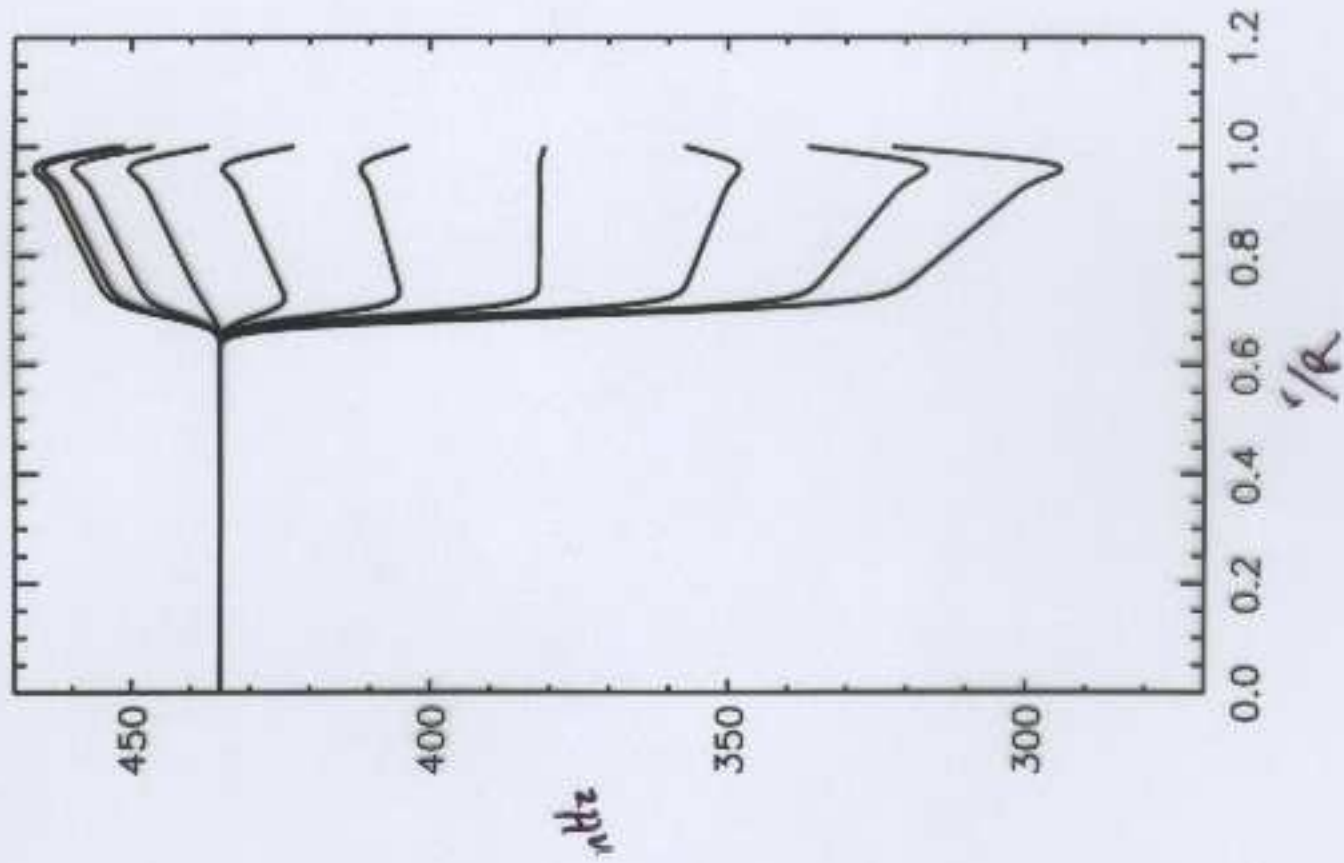
# Model C : realist

$$\omega_c = 0.05 R_0$$

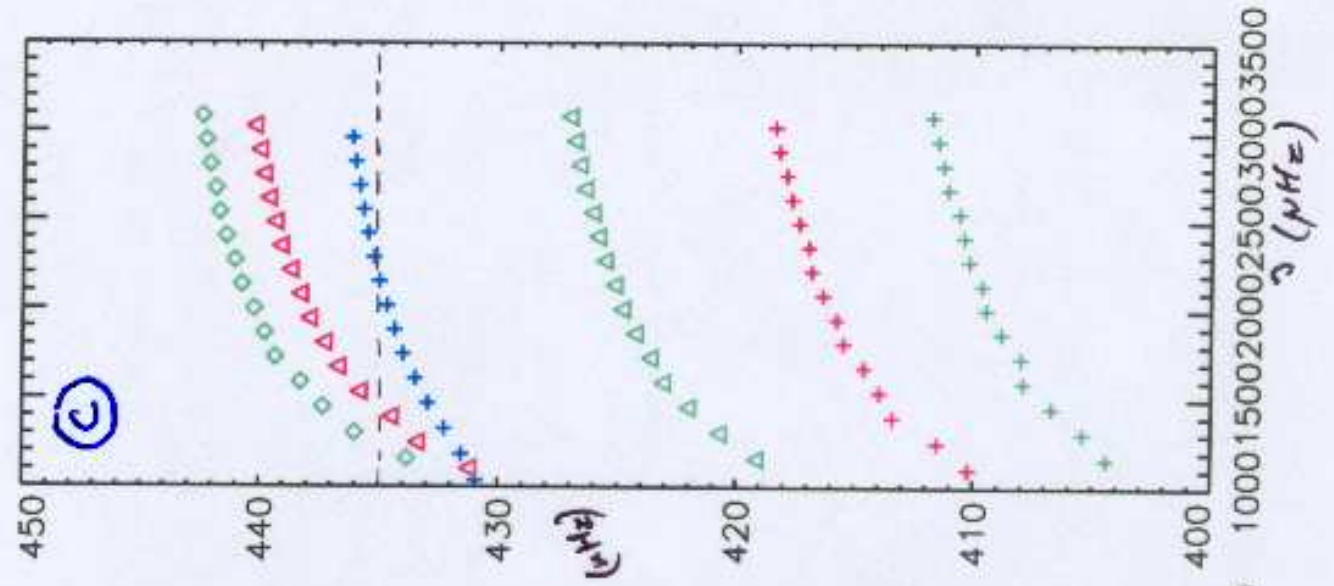
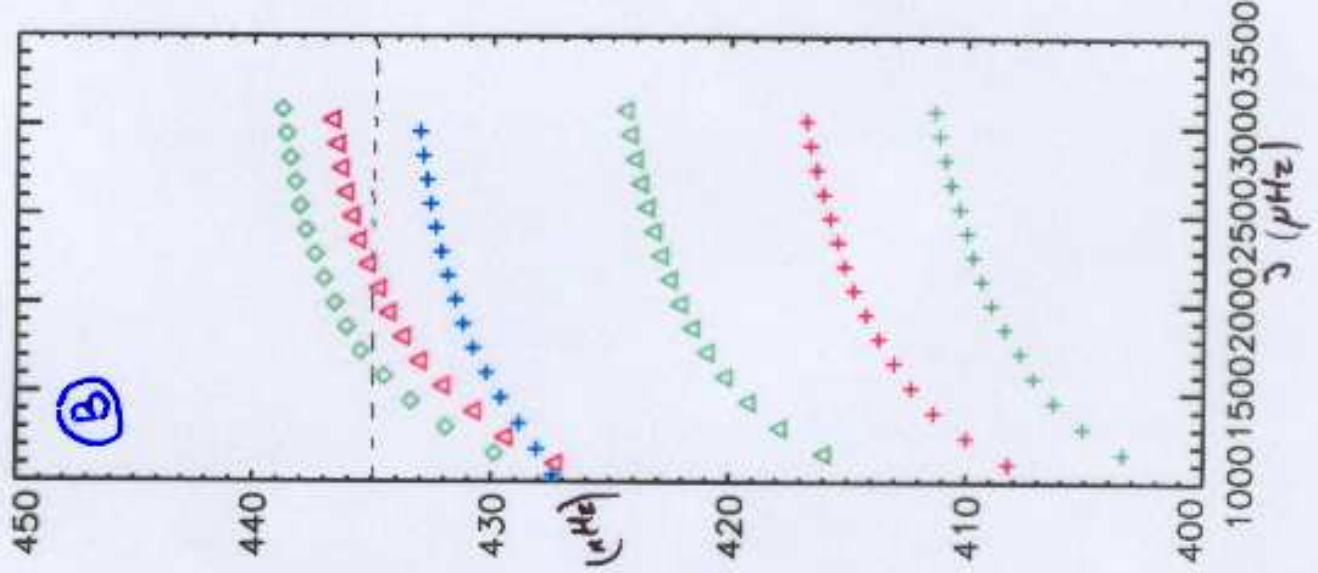
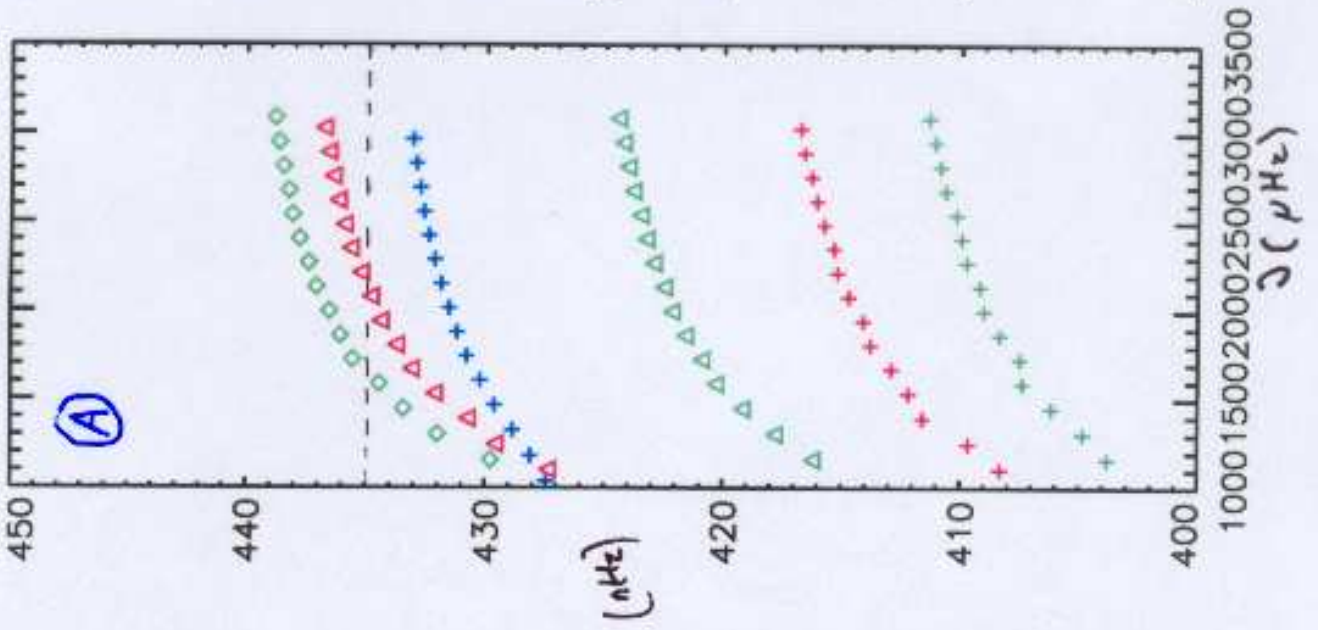
+ slight gradient in  $c_z$

+ strong gradient in  
supergranulation layer

Corbard & Thompson 2002

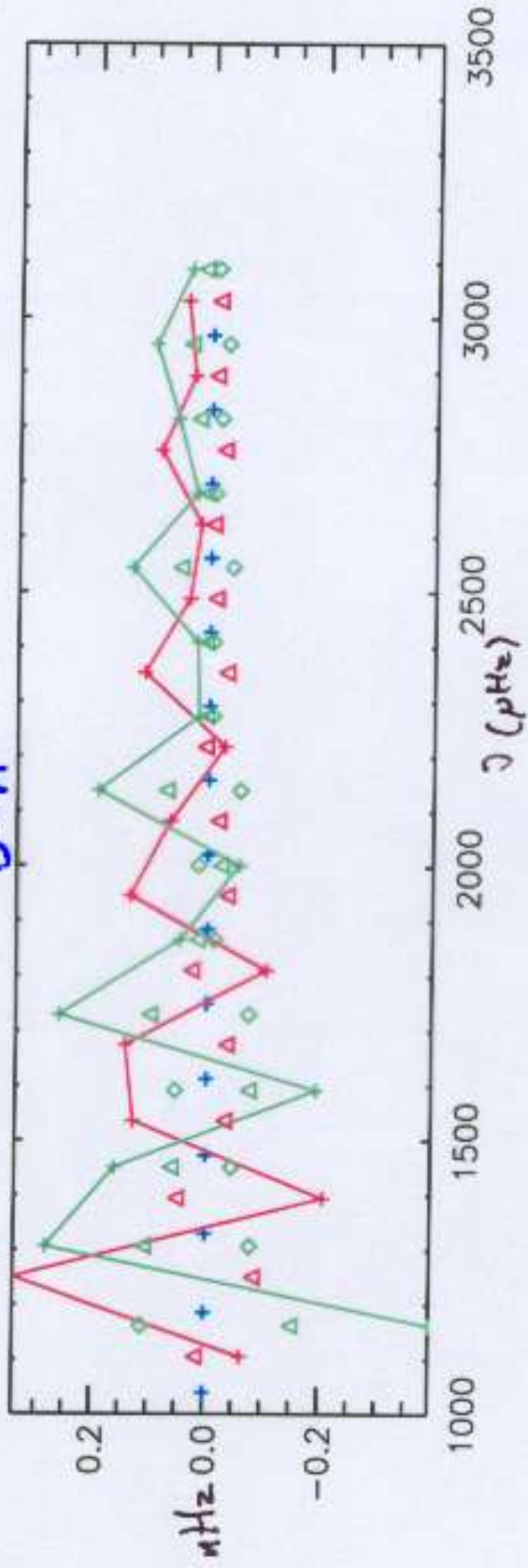


- $l = 1$
- $l = 2$
- $l = 3$
- +  $m = 1$
- $\Delta$   $m = 2$
- $\diamond$   $m = 3$



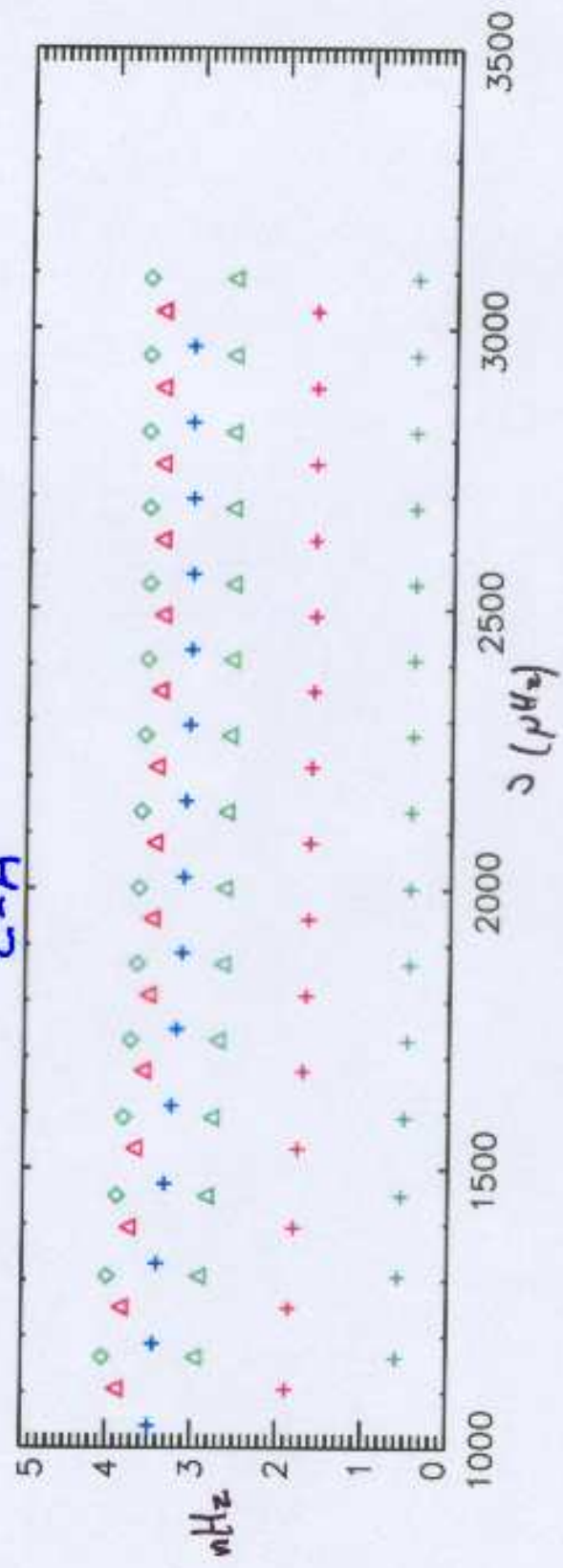


B-A



- $l=1$
- $l=2$
- $l=3$
- +  $m=1$
- $\Delta$   $m=2$
- $\diamond$   $m=3$

C-A



# Relation Between a-coef and Splittings for $l=1, 2, 3$

---

$$SD_m^l = \frac{j_m^l - j_{-m}^l}{2} = \sum_{j=0}^{l-1} a_{2j+1}^l P_{2j+1}^l(m) \quad m=1 \dots l$$

Schou 94 choose  $\sum_{m=-l}^l P_j^l(m) P_i^l(m) = 0 \quad i \neq j$   
 $P_j^l(l) = l$

$l=1$   $SD_1^{(1)} = a_1$

$l=2$   $\begin{cases} SD_1 = a_1 - 4 a_3 \\ \frac{SD_2}{2} = a_1 + a_3 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = \frac{1}{5} (SD_1 + 4 \frac{SD_2}{2}) \\ a_3 = \frac{1}{5} (-SD_1 + \frac{SD_2}{2}) \end{cases}$

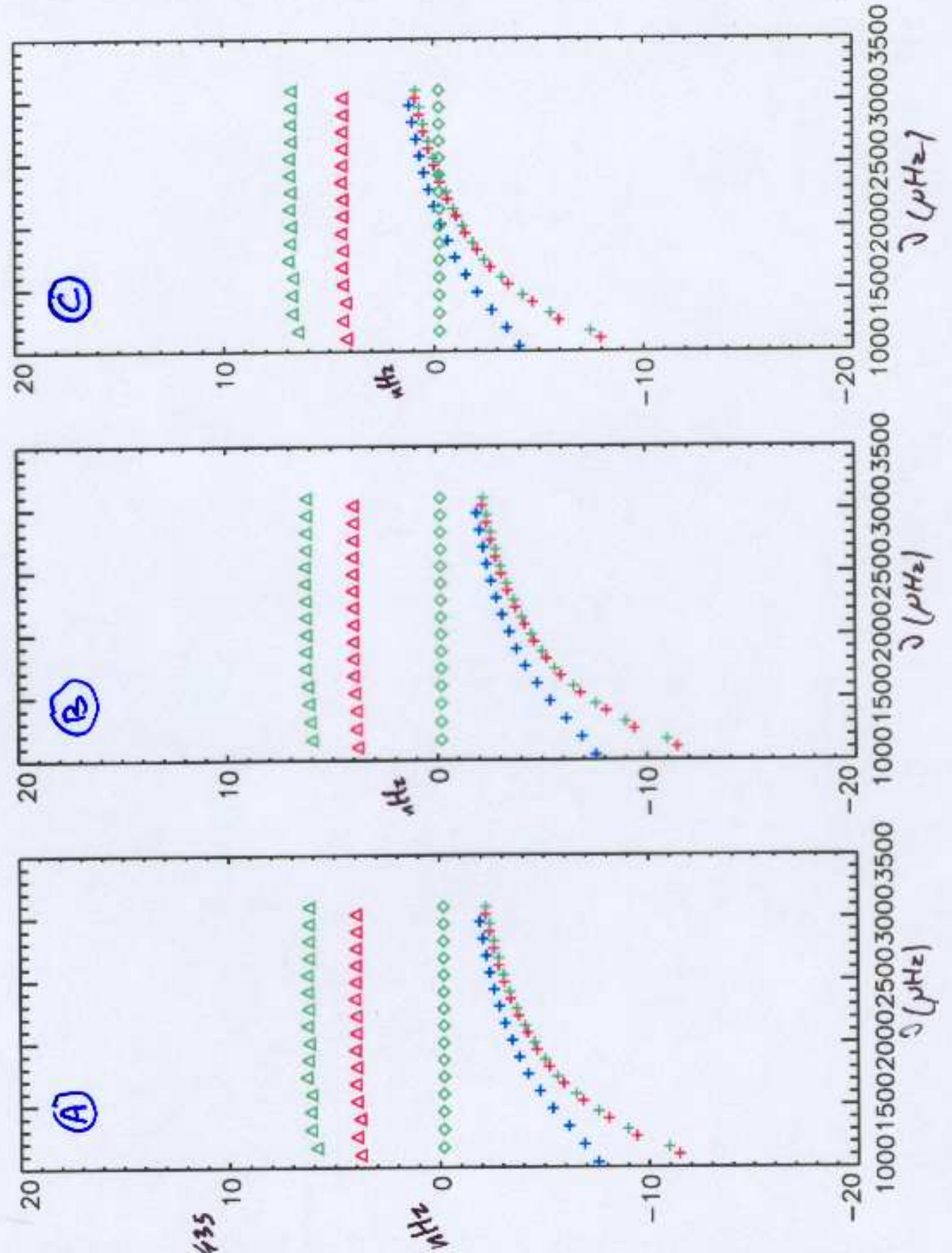
$l=3$   $\begin{cases} SD_1 = a_1 - 3 a_3 + 15 a_5 \\ \frac{SD_2}{2} = a_1 - \frac{3}{2} a_3 - 6 a_5 \\ \frac{SD_3}{3} = a_1 + a_3 + a_5 \end{cases}$



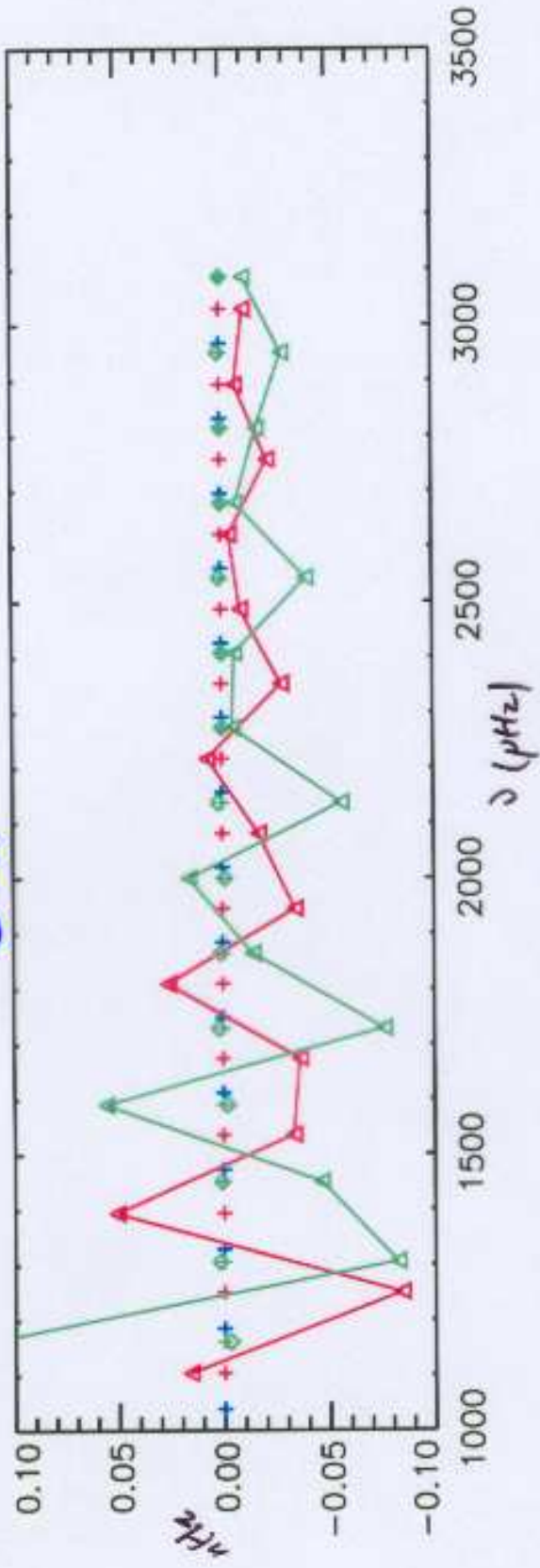
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{14} \left( SD_1 + 4 \frac{SD_2}{2} + 3 \frac{SD_3}{3} \right) \\ a_3 = \frac{1}{9} \left( -SD_1 - 2 \frac{SD_2}{2} + 3 \frac{SD_3}{3} \right) \\ a_5 = \frac{1}{126} \left( 5SD_1 - 8 \frac{SD_2}{2} + 3 \frac{SD_3}{3} \right) \end{cases}$$



-  $l=1$   
 -  $l=2$   
 -  $l=3$   
 +  $l=4$  → 435  
 $\Delta$   $a_3$   
 $\diamond$   $a_5$



B-A



$+l=1$   
 $-l=2$   
 $-l=3$   
 $+a_1$   
 $\Delta a_3$   
 $\delta a_5$

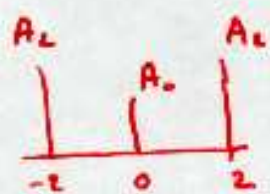
C-A



# Relation Between a-coeff, splittings and what is measured from disk-integrated data

l=1  $S_1 = S J_1 = a_1$        $\frac{1}{-1} \quad \frac{1}{1}$

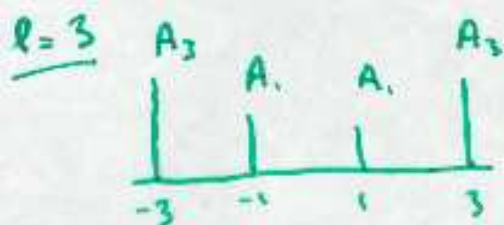
l=2



$J_{-2} = J_0 - 2 S_2$   
 $(J_0 = \bar{J}_0) \times e$        $e = \frac{A_0}{A_2}$   
 $J_2 = J_0 + 2 S_2$

Least Square  $\Rightarrow \bar{J}_0 = \frac{1}{2+e^2} [J_2 + J_{-2} + e^2 J_0]$

$$S_2 = \frac{S J_2}{2} = a_1 + a_3$$



$(J_{-3} = J_0 - 3 S_3) \times e$   
 $J_{-1} = J_0 - 1 S_3$        $e = \frac{A_3}{A_1}$   
 $J_1 = J_0 + 1 S_3$   
 $(J_3 = J_0 + 3 S_3) \times e$

Least Square  $\Rightarrow J_0 = \frac{1}{2(e^2+1)} [J_1 + J_{-1} + e^2 (J_3 + J_{-3})]$

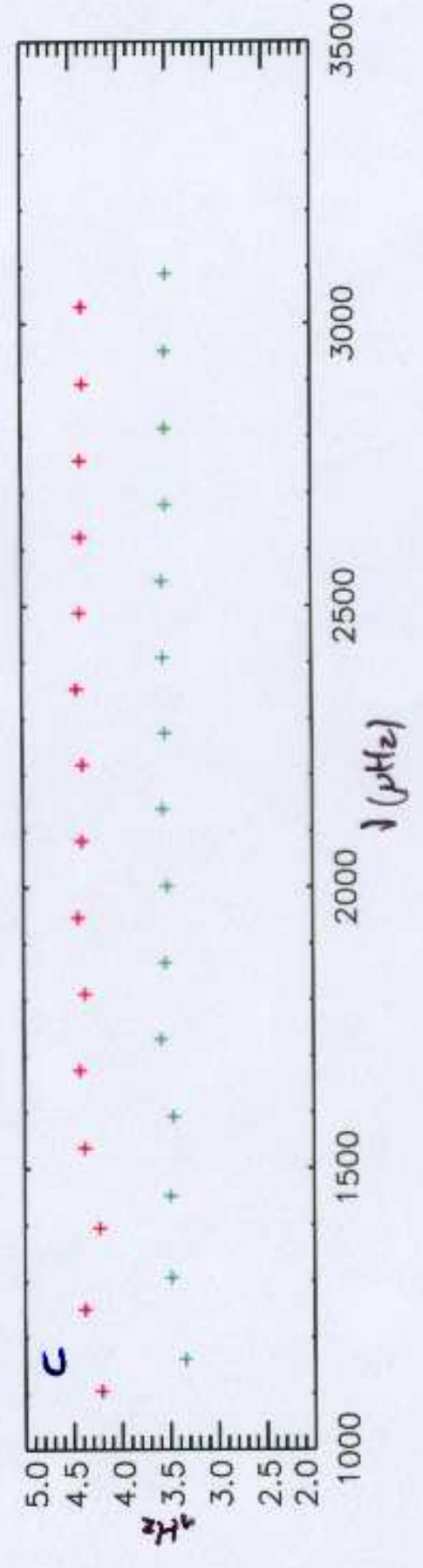
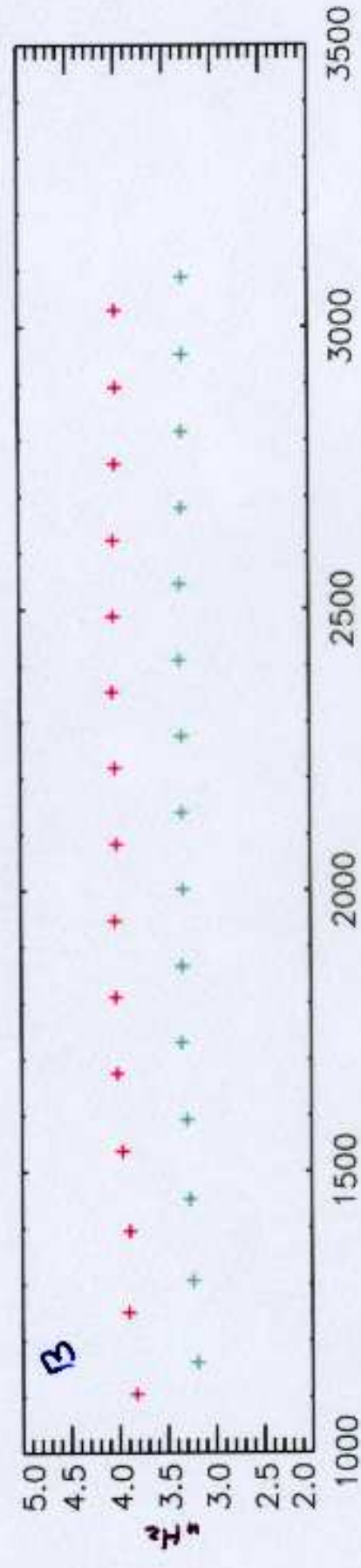
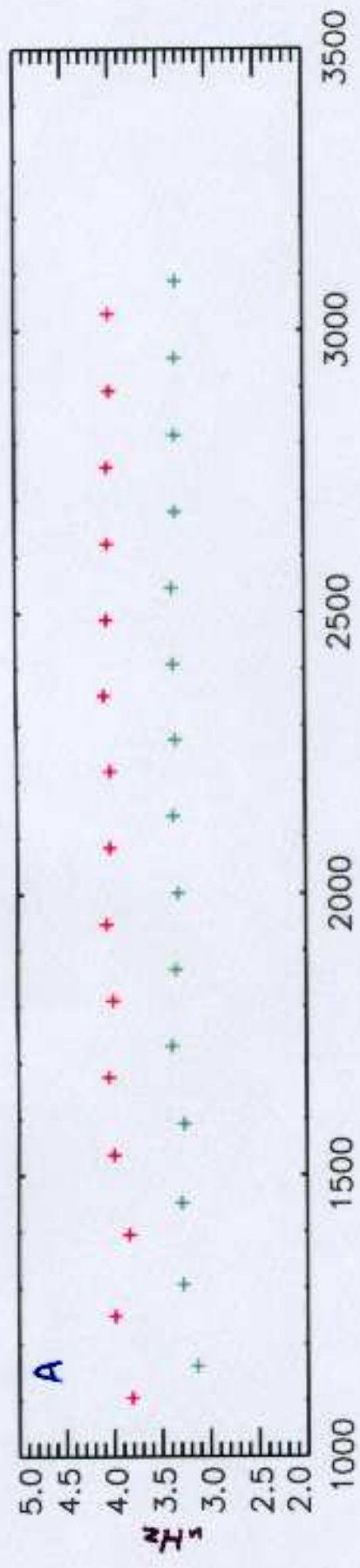
$$S_3 = \frac{1}{9e^2+1} [5J_1 + 9e^2 \frac{S J_3}{3}]$$

$$S_3 = \frac{1}{9e^2+1} [5J_1 + 9e^2 \frac{S J_3}{3}] = a_1 + \frac{9e^2-3}{9e^2+1} a_3 + \frac{9e^2+15}{9e^2+1} a_5$$

$e=1 \Rightarrow S_3 = \frac{1}{10} [5J_1 + 9 \frac{S J_3}{3}] = a_1 + \frac{6}{10} a_3 + \frac{24}{10} a_5$



$l=2$   
 $S_2 - a_2$   
 $l=3$   
 $S_3 - a_1$



### 3 Étude des noyaux de rotation

La nature du problème inverse qui consiste à déduire la rotation solaire de l'observation des splittings à partir de l'équation (32), est contenue dans la forme des noyaux de rotation  $K_{nlm}(r, \mu)$  donnés par l'équation (29). Deux exemples de ces noyaux bidimensionnels sont donnés Fig. 6 montrant leurs natures oscillantes caractérisées par  $n$  nœuds radiaux et  $\frac{l-m}{2}$  nœuds en latitude (entre l'équateur et le pôle, soit  $l-m$  nœuds d'un pôle à l'autre). On remarque immédiatement que ces noyaux n'ont pas de l'amplitude dans tout l'intérieur solaire et sont au contraire limités dans un certain domaine en rayon et en latitude. Nous verrons par la suite comment ce domaine peut être caractérisé en fonction des entiers  $n, l$  et  $m$  pour chaque mode propre.

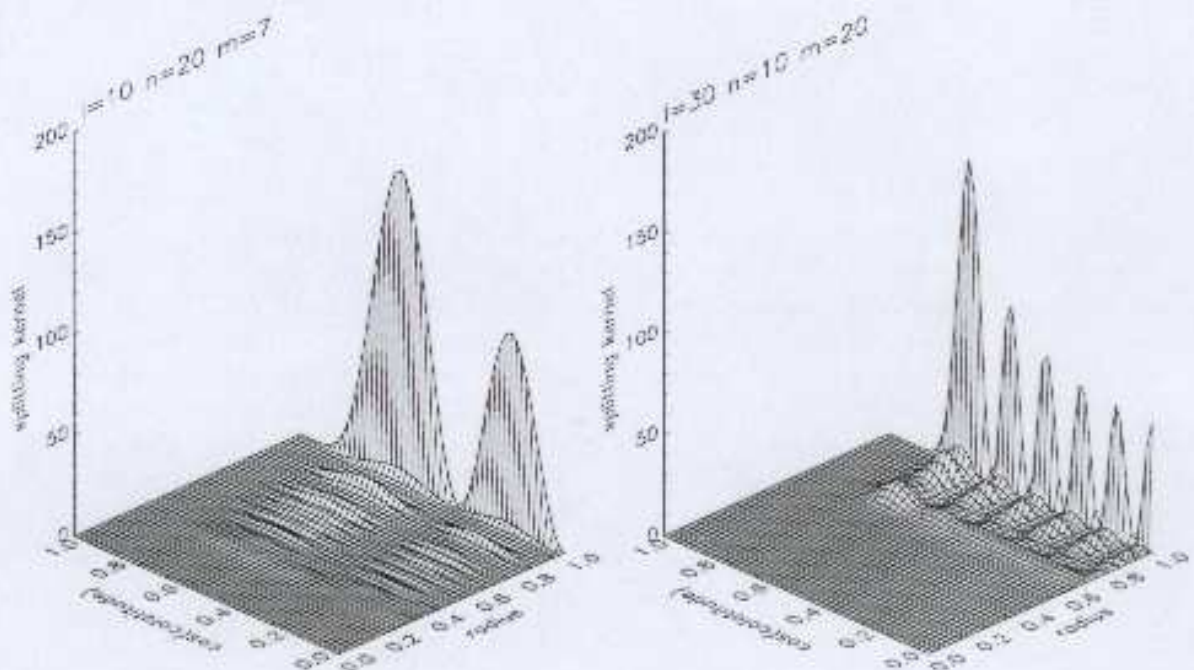


FIG. 6 - Exemples de noyaux de rotation  $K_{nlm}(r, \mu)$  pour  $l = 10, n = 20, m = 7$  (gauche) et  $l = 30, n = 10, m = 20$  (droite). D'après Sekii (1997).

Ces noyaux (Eq. (29)) peuvent être écrits sous plusieurs formes, mais la décomposition suivante est pratique pour l'analyse de leurs propriétés:

$$K_{nlm}(r, \mu) = K_{nl}(r)W_{lm}(\mu) + \underbrace{L_{nl}(r)X_{lm}(\mu)}_{\ll}$$

$$\frac{\iint \mathcal{L}(r)X(\mu)\mathcal{R}(r,\mu) \ll \iint K_{nlm}(r,\mu)\mathcal{R}(r,\mu)} \quad (33)$$

avec:

$$K_{nl}(r) = [\zeta_{nl}^{(o)^2} + (L^2 - 1)\eta_{nl}^{(o)^2} - 2\zeta_{nl}^{(o)}\eta_{nl}^{(o)}] \rho r^2 / I_{nl} \quad (34)$$

$$L_{nl}(r) = L^2 \eta_{nl}^{(o)^2} \rho r^2 / I_{nl} \quad (35)$$

$$W_{lm}(\mu) = \tilde{P}_l^m(\mu)^2 \quad (36)$$

$$X_{lm}(\mu) = L^{-2} \left\{ \frac{1 - \mu^2}{2} \frac{d^2}{d\mu^2} W_{lm}(\mu) + W_{lm}(\mu) \right\} \quad (37)$$

où l'on a noté  $L^2 = l(l+1)$  et  $L_{nl}$  est donné par l'équation (24).

### 3.1 Noyaux de rotation en rayon: $K_{nl}(r)$ et $L_{nl}(r)$

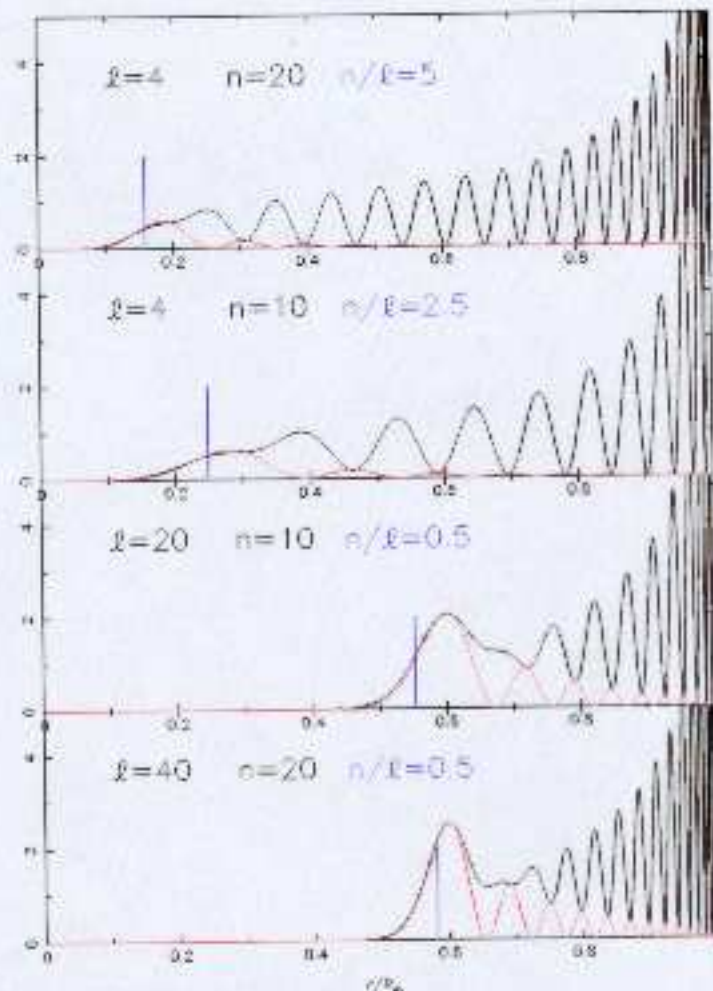


FIG. 7 – Exemples des composantes radiales  $K_{nl}(r)$  (Eq. (34), ligne continue) et  $L_{nl}(r)$  (Eq. 35, ligne pointillée) des noyaux de rotation pour différents modes. Les barres verticales indiquent la position du point tournant de chacun des modes considérés.

La figure 7 donne des exemples des deux composantes radiales des noyaux de rotations (33) pour différents modes. Les modes de pression observés peuvent être décrits par une approximation locale en ondes planes valable asymptotiquement pour les hautes fréquences (voir le cours de G. Berthomieu). Cette étude permet d'écrire, pour ces modes de pression, une relation de dispersion de la forme:

$$K_r^2 + K_h^2 \simeq \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \quad (38)$$

où  $K_r$  et  $K_h$  représentent respectivement le nombre d'onde radial et le nombre d'onde horizontal,  $c(r)$  la vitesse du son et  $\omega_c(r)$  la fréquence de coupure acoustique qui reste très petite ( $< 600 \mu\text{Hz}$ ) dans tout l'intérieur du Soleil et devient importante (jusqu'à environ  $5000 \mu\text{Hz}$ ) seulement dans une petite couche très près de la surface (au dessus de  $0.9995 R_\odot$ ).



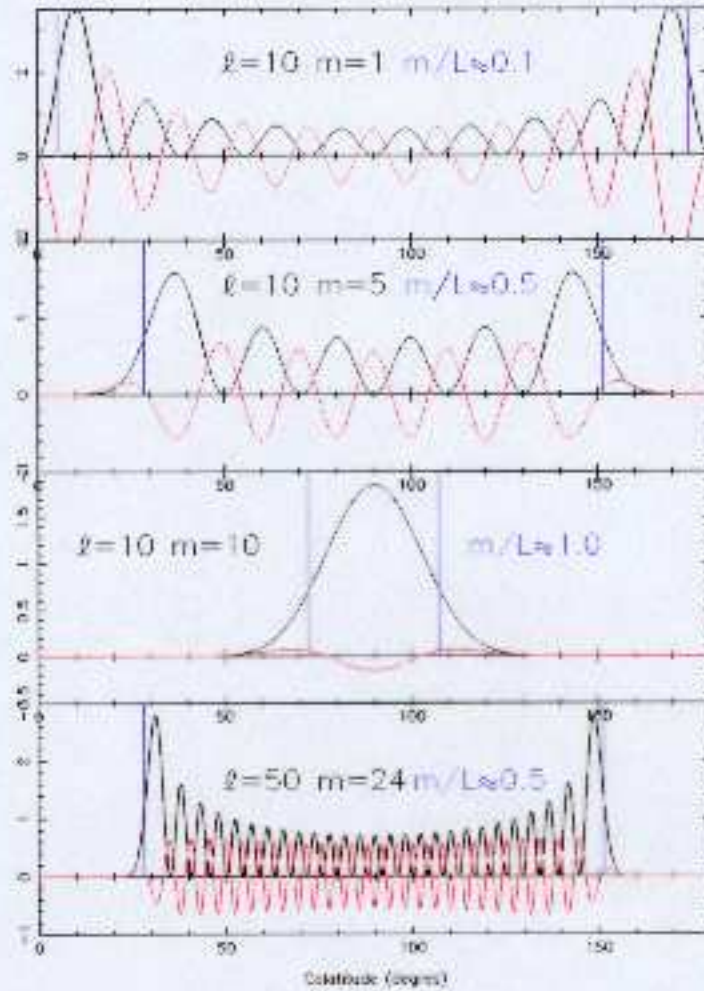


FIG. 8 – Exemples des composantes latitudinales  $W_{lm}(\mu)$  (Eq. 36, ligne continue) et  $X_{lm}(\mu)$  (Eq. 37, ligne pointillée) des noyaux de rotation pour différents modes. Les barres verticales indiquent la position du point tournant de chacun des modes considérés.

$$K_{\theta}^2 = \frac{1}{r^2} \left( L^2 - (m/\sin \theta)^2 \right) > 0 \Leftrightarrow \pi - \theta_t < \theta < \theta_t \quad \text{avec: } \theta_t = \sin^{-1}(|m|/L) \quad (45)$$

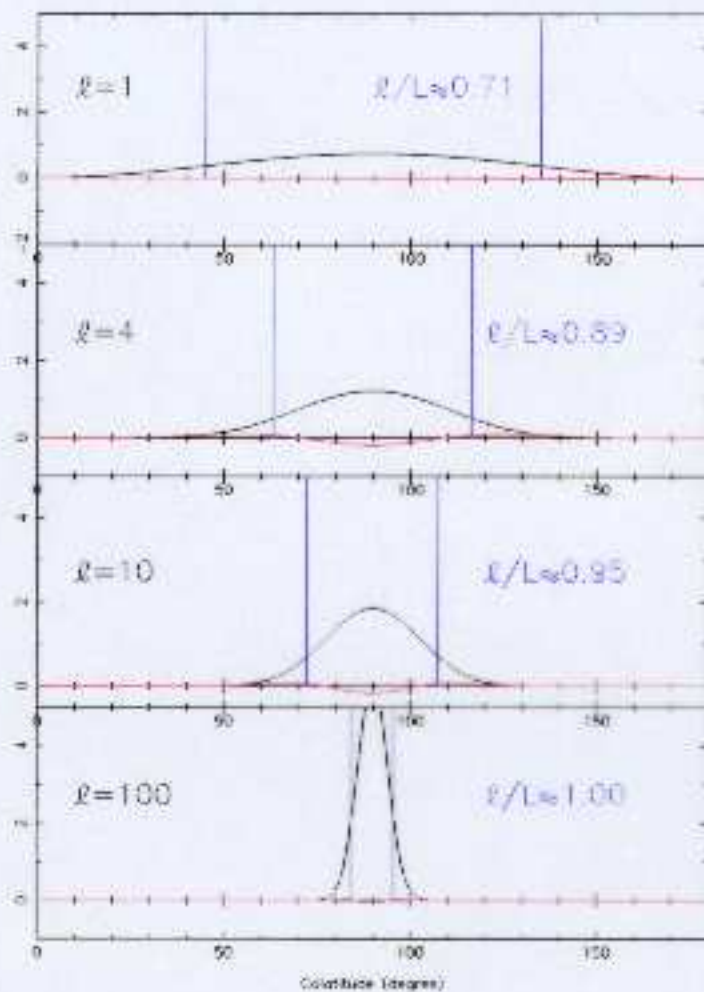
La figure 8 montre sur quelques exemples le fait que le point tournant en latitude est une fonction de  $m/L$ .

Une autre propriété importante de  $W_{lm}$  et  $X_{lm}$  est que ce sont des fonctions paires de l'ordre azimutal  $m$  et de la colatitude  $\theta$ . On ne pourra donc obtenir que la composante de la rotation qui est symétrique par rapport à l'équateur. Soit:

$$\Omega_s(r, \mu) \equiv \frac{\Omega(r, \theta) + \Omega(r, \pi - \theta)}{2} \quad (46)$$

L'intégration en latitude peut donc se faire entre l'équateur et le pôle seulement, et cela en multipliant simplement par deux le noyau de rotation. La partie symétrique  $\Omega_s(r, \mu)$  de la rotation ainsi définie sera notée simplement  $\Omega(r, \mu)$  dans la suite. La parité du noyau en  $m$  donne avec l'équation (32):

$$\delta\omega_{nlm} = -\delta\omega_{nl,-m} = \frac{\omega_{nlm} - \omega_{nl,-m}}{2} \quad (47)$$



$$W_{ee}(\nu) = C_l (1 - \nu^2)^l$$

$$C_l = \frac{(2l+1)!}{2^{l+l} (l!)^2}$$

FIG. 9 – Comme Fig. 8 mais pour les modes sectoriaux  $l = 1, 4, 10, 100$ . Les points tournants sont d'autant plus éloignés de l'équateur que le rapport  $l/L$  est différent de 1 et donc que le degré  $l$  est petit.  $\theta_l(l=1) = 45^\circ$ ,  $\theta_l(l=4) \simeq 63^\circ$ ,  $\theta_l(l=10) \simeq 72^\circ$ ,  $\theta_l(l=100) \simeq 84^\circ$

$$\frac{\omega_{nl} - \omega_{n,l-1}}{2l} \simeq \int_0^{R_\odot} K_{nl}(r) \Omega_{eq}(r) dr \quad (51)$$

Cette équation 1D employée par Duvall dès 1984 reste très utilisée comme première approximation (eg. Antia et al. 1996, Rabello Soares et al. 1997, Corbard et al. 1998c). Il faut cependant noter qu'elle n'est pas valable pour les modes de bas degrés. La figure 9 montre en effet que pour ces modes la partie angulaire du noyau de rotation peut s'étendre loin de l'équateur et ce d'autant plus que le rapport  $l/L$  s'éloigne de 1. On ne peut donc pas en toute rigueur utiliser cette équation pour remonter par inversion à la rotation de cœur solaire sans faire des hypothèses sur la dépendance en latitude de la rotation (Corbard 1997, Corbard et al. 1998c).

$$\frac{\omega_{nl} - \omega_{n,l-1}}{2l} = \int_0^R K_{nl}(r) \underbrace{\int_0^{\pi/2} C_l \sin^3 \theta \Omega(r, \theta) d\theta}_{l \text{ dependent}} d\theta$$



$$\Delta \omega_{nl}[\Omega(r, \theta) - \Omega_{nl}(r)] - \Delta \omega_{nl}[\Omega(r, \theta)]$$

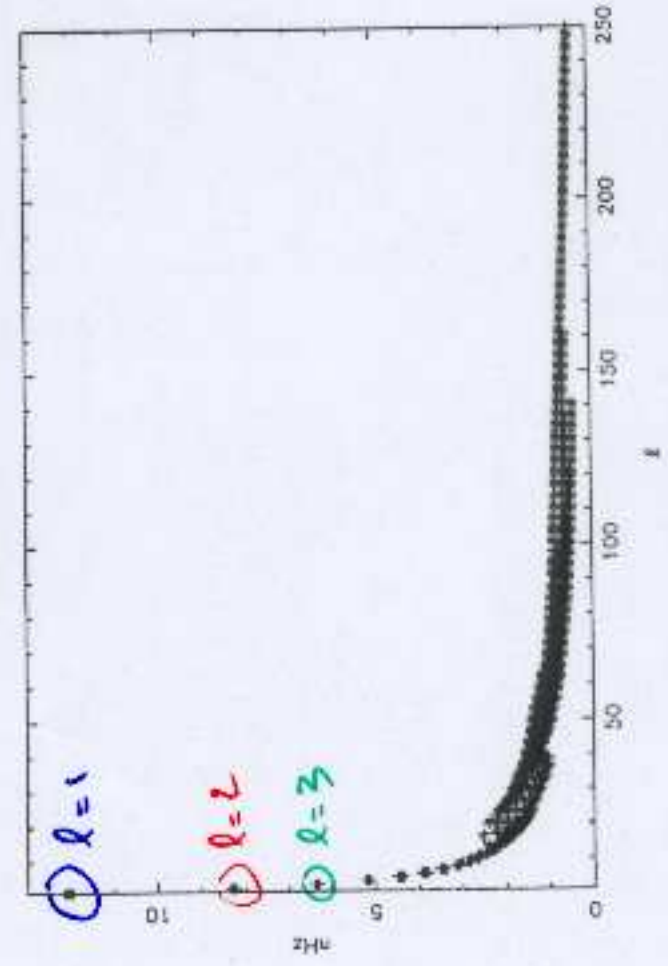


Figure 2. Difference in sectoral splittings computed from Equation 1 and from the 1D approximation Equation 6 for a given 2D rotation profile resulting from a 2D RLS inversion of MDI data. The difference is around 12nHz for  $l = 1$ , 8nHz for  $l = 2$ , 6nHz for  $l = 3$ . This is due to the fact that for low  $l$ ,  $P_l^l(\mu)$  extend far from the equator and therefore low-degree sectoral modes are more sensitive to the latitudinal dependency of the rotation in comparison to other sectoral modes.

of the form:

$$\hat{\Omega}(r_0) = \int \int \left( \sum_{nl} C_{nl}(r_0) K_{nl}(r) W_l(\mu) \right) \Omega(r, \mu) dr d\mu \quad (1)$$

The 2D averaging kernels (defined by the term in parentheses in Equation 10) can therefore be computed from the 1D averaging kernels Equation 8 obtained at a target location  $r_0$  by adding the angular part  $W_l(\mu)$  of the 2D rotational kernel that corresponds to the data really inverted.

Figure 3 shows on the left the 2D averaging kernels (defined by the term in parentheses in Equation 10) obtained at  $r_0 = 0.2R_\odot$  by inverting GC sectoral splittings together with MDI ‘truncated sectoral’ splittings i.e.:

$$W_l(\mu) = \begin{cases} P_l^l(\mu)^2 & \text{for } l \leq 3 \\ \sum_{j=1}^{j_{max}} Q_{lj}(\mu) & \text{for } l > 3 \end{cases} \quad (2)$$

whereas, on the right, it shows the 2D averaging kernel obtained at the same target location by inverting



$$2\pi a_{2j+1}^{nl} \approx 2 \int_0^R \int_0^l \underbrace{\sum_{m=1}^l m^l P_{2j+1}^l(m) K_{nlm}(r, \mu)} \Omega(r, \mu) dr d\mu$$

bonne approximation de la relation entre splittings et coefficients  $a$ . Si l'on reporte (75) dans l'équation 2D (31), on obtient une équation intégrale 2D reliant chaque coefficient  $a$  à la rotation par:

$$2\pi a_{2j+1}^{nl} \stackrel{?}{\approx} 2 \int_0^R \int_0^l \underbrace{\sum_{m=1}^l m^l P_{2j+1}^l(m) K_{nlm}(r, \mu)}_{K_{nl}^{(a)}(r, \mu)} \Omega(r, \mu) dr d\mu, \quad (76)$$

ce qui définit le noyau  $K_{nl}^{(a)}(r, \mu)$  relatifs aux coefficients  $a$ .

#### 4.5.2 Cas particulier des polynômes orthogonaux - séparabilité

Dans le cas  $P_j^l(m) = S_{jl}^m$ , on obtient une expression du noyau  $K_{nl}^{(a)}(r, \mu)$  sous la forme (Pijpers 1997):

$$K_{nl}^{(a)}(r, \mu) = K_{nl}(r) W_{lj}^{(a)}(\mu) + L_{nl}(r) X_{lj}^{(a)}(\mu) \quad (77)$$

où  $K_{nl}(r)$  et  $L_{nl}(r)$  sont données respectivement par (34) et (35) et:

$$W_{lj}^{(a)}(\mu) = -\frac{1}{2} \frac{(4j+3)P_{2j+1}^{(j)}(\mu)}{(j+1)(2j+1)} \sin \theta \quad (78)$$

$$X_{lj}^{(a)}(\mu) = -j(2j+3) W_{lj}^{(a)}(\mu) \quad (79)$$

$P_{2j+1}^{(j)}$  est donné par (A10). Cette décomposition explicite du noyau 2D en la somme de deux noyaux séparables permet de traiter l'inversion des coefficients  $a$  d'une manière identique à celle des splittings. De plus, on note que ces noyaux sont tels que  $\int_{-1}^1 W_{lj}^{(a)}(\mu) d\mu = \delta_{j0}$  et  $\int_{-1}^1 X_{lj}^{(a)}(\mu) d\mu = 0$ . En première approximation, et pour  $l$  élevé on peut donc négliger le deuxième terme de la somme (77) (cf. §3.3). Enfin notons que l'on trouve facilement les noyaux liés à l'utilisation des polynômes  $\gamma_j^m$  en utilisant (A9) et que la formule (A11) permet de passer, pour  $l$  élevés, au cas où les splittings sont projetés sur des polynômes de Legendre.

$$\stackrel{j=0}{2\pi a_1^{nl}} = \frac{3}{2} \int_0^R \int_0^{\pi/2} K_{nl}(r) \sin^3 \theta \Omega(r, \theta) dr d\theta$$

$$\bar{\Omega}_1(r) = \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \Omega(r, \theta) d\theta$$

$$2\pi a_1^{nl} = \int_0^R K_{nl}(r) \bar{\Omega}_1(r) dr$$

